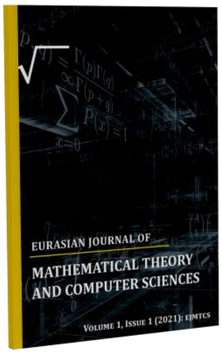
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ СТАХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ТОЧЕЧНЫМ ПРОЦЕССАМ

Х.М.Маматов
Университет общественной безопасности Республики Узбекистан
https://www.doi.org/10.37547/ejmtcs-v03-i02-p1-05

ARTICLE INFO

Received: 09th February 2023
Accepted: 16th February 2023
Online: 17th February 2023

KEY WORDS

ABSTRACT

Пусть X – пространство непрерывных справа кусочно-постоянных функции $x = \left\{x_t, \, t \in R^+\right\}$ таких, что $x_0 = 0$

$x_t < \infty$

$x_t = x_{t^-} + 0$ или 1 для всех $t < \infty$.

Определение. Заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \, F, \, P)$ случайный процесс $Z = (Z_t, \, F_t)$ принадлежащими пространству X, будем называть точечным процессом.

Всякий точечный процесс $Z = (Z_t, \, F_t)$ локально ограничен и имеет непрерывные справа неубывающие траектории.

Поэтому всякий точечный процесс $Z = (Z_t, \, F_t)$ имеет следующее разложение

$$Z_t = M_t + A_t$$

где $M = (M_t, \, F_t)$, $t \in R^+$ – локальный мартингал с непрерывными справа траекториями, а $A = (A_t, \, F_t)$, $t \in R^+$ – предсказуемый возрастающий процесс, которого называют компенсатором точечного процесса $Z = (Z_t, \, F_t)$.

Рассмотрим последовательность пар точечных процессов $\left(X^n, Y^n\right)=\left(X_t^n, Y_t^n\right)_{t\geq 0}$ относительно $\left(F^n, P\right)$ $X_0^n=Y_0^n=0$ и со следующими разложениями:

$X_t^n=M_t^n+A_t^n$

и

$Y_t^n=N_t^n+B_t^n$.

Рассмотрим также пару пуассоновских процессов $\left(X, Y\right)=\left(X_t, Y_t\right)_{t\geq 0}$, $X_0=Y_0=0$ с компенсаторами $\lambda_1 t$ и $\lambda_2 t$.

Пусть $f\left(t,x\right)$ – непрерывная функция $\left(t,R\right)\in R^+\times R$.

При формулировке теорем будем пользоваться следующими условиями

(A1)
$$A_t^n\xrightarrow{P}\lambda_1 t$$
$$B_t^n\xrightarrow{P}\lambda_2 t$$

(A2)
$$\left\langle M^n,N^n\right\rangle_t\xrightarrow{P}\left\langle M,N\right\rangle_t$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (A1), (A2). Тогда имеет слабая сходимость в топологии Скорохода в пространстве D

$$\int_0^t f\left(s,X_{s-}^n\right)dY_s^n\xrightarrow{D}\int_0^t f\left(s,X_{s-}\right)dY_s.$$

Через V^+ подмножества пространства D, состоящих из неубывающих функции.

Определение. Случайный процесс $\tau=\left(\tau_t\right)_{t\geq 0}$ принадлежащий классу V^+ и такой, что τ_t момент остановки (относительно семейства $F=\left(F_t\right)_{t\geq 0}$) для каждого $t\geq 0$, называется случайной заменой времени.

С каждым процессом $X\in D\cap F$ и случайной заменой времени $\tau=\left(\tau_t\right)_{t\geq 0}$ можно связать новый процесс $\hat{X}$, пологая

$$\hat{X}_t\left(\omega\right)=X_{\tau_t(\omega)}\left(\omega\right),\ t\geq 0.$$

С семейством F и τ свяжем также новый поток σ - алгебра $\hat{F} = \left(\hat{F}_t\right)_{t\geq 0}$

$\hat{F}_t = F_{\tau_t}$.

Рассмотрим $\hat{X}^n = \left(\hat{X}_t^n, F_t^n\right)$ и $\hat{Y}^n = \left(\hat{Y}_t^n, \hat{F}_t^n\right)$, $\hat{X}_t^n = \hat{X}_{\tau_t^n}^n$, $\hat{Y}_t^n = \hat{Y}_{\tau_t^n}^n$,

$\hat{F}_t^n = F_{\tau_t^n}^n$, где $\tau_t^n = \left(\tau_t^n\right)_{t\geq 0} \in V^+$.

При формулировке теорем будем пользоваться следующими условиями:

$$A_{\tau^n(t)}^n \xrightarrow{P} \lambda_1 t$$

(B1)
$$B_{\tau^n(t)}^n \xrightarrow{P} \lambda_2 t$$

(B2)
$$\left\langle M^n, N^n \right\rangle_{\tau_t^n} \xrightarrow{P} \left\langle M, N \right\rangle_t$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (B1), (B2). Тогда имеет место слабая сходимость в топологии Скорохода в пространстве D

$$\int_0^{\tau_t^n} f\left(s, X_{s-}^n\right) dY_s^n \xrightarrow{D} \int_0^t f\left(s, X_{s-}\right) dY_s.$$

При доказательстве теорем используется следующие леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия (A1) и (A2). Тогда

$$\left(X^n, Y^n\right) \xrightarrow{D_f} \left(X, Y\right).$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (B1) и (B2). Тогда

$$\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n\right) \xrightarrow{D_f} \left(X, Y\right).$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (A1) и (A2). Тогда

$$\left(X^n, Y^n\right) \xrightarrow{D_f} \left(X, Y\right).$$

Лемма 2. Пусть выполнены условия (B1) и (B2). Тогда

$$\left(\hat{X}^n, \hat{Y}^n\right) \xrightarrow{D_f} (X, Y)$$
.

Доказательство леммы 1. Для доказательство достаточно показать, что для $c_1, c_2 \in R$

$$Ee^{ic_1 X_t^n + ic_2 Y_t^n} \to Ee^{ic_1 X_t + ic_2 Y_t}.$$

Обозначим

$u_t = e^{ic_1 X_t}$ и $z_t = e^{ic_2 Y_t}$

Вычислим скачки u_t и z_t

$$\Delta u_t = u_{t-}\left(e^{ic_1 \Delta X_t} - 1\right) = u_{t-}\left(e^{ic_1} - 1\right)\Delta X_t,$$

$$\Delta z_t = z_{t-}\left(e^{ic_1 \Delta Y_t} - 1\right) = z_{t-}\left(e^{ic_1} - 1\right)\Delta Y_t.$$

Тогда

$$\Delta u_t \Delta z_t = u_{t-} z_{t-}\left(e^{ic_1 + ic_2} - e^{ic_1} - e^{ic_2} + 1\right)\Delta X_t \Delta Y_t.$$

По формуле Ито (замени переменных)

$$du_t z_t = u_{t-} dz_t + z_{t-} du_t + d[u, z]_t$$

Так как

$$du_t = u_{t-}\left(e^{ic_1} - 1\right) dX_t$$

$$dz_t = u_{t-}\left(e^{ic_2} - 1\right) dY_t.$$

Следовательно

$$u_t z_t = 1 + \int_0^t u_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_1} - 1\right) dX_s + \int_0^t u_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_2} - 1\right) dY_s +$$

$$+ \int_0^t u_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_1 + ic_2} - e^{ic_1} - e^{ic_2} + 1\right) d[X, Y].$$

Далее

$$Eu_t z_t = 1 + \int_0^t Eu_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_1} - 1\right)\lambda_1 dt + \int_0^t Eu_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_2} - 1\right)\lambda_2 dt +$$

$$+ \int_0^t Eu_{s-} z_{s-}\left(e^{ic_1 + ic_2} - e^{ic_1} - e^{ic_2} + 1\right) d\langle X, Y\rangle.$$

Тогда

$$Ee^{ic_1 X_t + ic_2 Y_t} = Ee^{\left(e^{ic_1} - 1\right)\lambda_1 t} \cdot e^{\left(e^{ic_2} - 1\right)\lambda_2 t} + \left(e^{ic_1 + ic_2} - e^{ic_1} - e^{ic_2} + 1\right)\langle X, Y\rangle_t.$$

Для доказательства $\left(X^n,Y^n\right)\xrightarrow{D_f}\left(X,Y\right)$ достаточно убедиться в ней для каждого конечного временного интервала. Зафиксируем некоторое T и будем обозначать $\left(X^n,Y^n\right)\xrightarrow{D_f(T)}\left(X,Y\right)$ сходимость конечномерных распределений $\left(X^n,Y^n\right)$ к конечномерным распределениям $\left(X,Y\right)$ на $\left[0,T\right]$.

Определим последовательность $\left(F,P\right)$ моментов остановки $\sigma^n,\ n\geq 1$

$$\sigma^n=\inf\left\{t:A_t^n\geq\lambda_1 T+1\right\}\wedge\inf\left\{t:B_t^n\geq\lambda_2 T+1\right\}$$

в соответствии с (A1) получаем, что для любого $T\geq 0$ при $n\to\infty$

$$P\left(\sigma^n\leq T\right)\to 0.$$

Пусть

$$G_t^n\left(c_1,c_2\right)=\left(e^{ic_1}-1\right)A_t^n+\left(e^{ic_2}-1\right)B_t^n+\left(e^{ic_1+ic_2}-e^{ic_1}-e^{ic_2}+1\right)\left\langle M^n,N^n\right\rangle_t.$$

Тогда из теоремы 5.1.1 ([1])

$$Ee^{ic_1X^n_{t\wedge\sigma^n}+ic_2Y^n_{t\wedge\sigma^n}}\cdot\varepsilon^{-1}_{t\wedge\sigma^n}\left(G^n\right)=1$$

и

$$\left|\varepsilon_{t\wedge\sigma^n}\left(G^n\right)\right|\geq d$$

, где d – константа не зависящая от n, $\varepsilon_t\left(G^n\right)$ – экспонента Долеана, т.е.

$$\varepsilon_t\left(G^n\right)=e^{G_t^n}\prod_{0\leq s\leq t}\left(1+\Delta G_s^n\right)e^{-\Delta G_s^n}$$

далее для любого $\varepsilon>0$

$$\overline{\lim_n}\,P\left(\left|\prod_{0\leq s\leq t}\left(1+\Delta G_s^n\right)e^{-\Delta G_s^n}-1\right|>\varepsilon\right)=0.$$

Тогда из теоремы 5.1.3 [1] следует, что достаточно проверить

$$e^{G_t^n\left(c_1,c_2\right)}\xrightarrow{P}e^{G_t\left(c_1,c_2\right)}$$

где $G_t\left(c_1,c_2\right)=\left(e^{ic_1}-1\right)\lambda_1 t+\left(e^{ic_2}-1\right)\lambda_2 t+\left(e^{ic_1+ic_2}-e^{ic_1}-e^{ic_2}+1\right)\left\langle M,N\right\rangle_t.$

Для этого достаточно показать, что при $n\to\infty$

$$G_t^n\left(c_1,c_2\right)\xrightarrow{P}G_t\left(c_1,c_2\right)$$

из условий (A1) и (A2) вытекает последнее выражения.

Лемма 2 доказывается таким же методом как лемма 1.

Используя леммы 1 и 2 и из результатов работы [2] получаем доказательства теорем 1и 2.

References:

1. Липцер Р.Ш, Ширяев А.Н. Теория мартингалов. М.Наука. 1986. -512 с.
2. Маматов Х.М. О слабой сходимости стохастических интегралов по семимартингалам // Успехи мат. наук. – 1986. – Т. 41. -N5. – С. 187-188.
3. Маматов Х.М., Мирзаева М.М., Исомиддинов М.Ш. Слабая сходимость стохастических интегралов Лебега-Стильтьеса // “Ilm-fan taraqqiyotida zamonaviy metodlarning qo’llanilishi” mavzusidagi ilmiy onlayn konferensiya to’plami. №28, 27.12.2022 – С. 133-137.