



## MATEMATIK INDUKSIYA METODI YORDAMIDA TENGLIK VA AYNIYATLARNI ISBOTLASH

**Abduraxmonov Baxromjon Alisherovich<sup>1</sup>,  
Xakimova Salomat Abdalimovna<sup>2</sup>,  
To'ychiyeva Nigora To'xtaraliyevna<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Toshkent farmatsevtika instituti Fizika, matematika va axborot texnologiyalari kafedrasi mudiri, f.-m.f.n., dotsent

<sup>2</sup>Yunusobod tumani, 9-IDUM matematika fani o'qituvchisi

<sup>3</sup>Chust tumani 43 maktabda matematika fani o'qituvchisi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.6320503>

### MAQOLA TARIXI

Qabul qilindi: 15-mart 2022

Ma'qullandi: 20-mart 2022

Chop etildi: 25-mart 2022

### KALIT SO'ZLAR

*P.Fermaga*

*1732 yili Leonard Eylar*

*Pyer Fermaning farazini*

*inkor etdi*

Ma'lumki, tabiatdagi ko'plab jarayonlar va muammolar matematik modellashtirish orqali u yoki bu masala yechimini topishga, matematik mulohazalar ustida mushoxada yuritishga, ba'zi tasdiqlarni isbotlashga keltiriladi. Matematik mushohada yuritish orqali o'quvchining tafakkuri ortadi, ilmiy salohiyati yuksaladi. Ko'plab natural parametrli matematik ayniyatlar, tengliklar, tasdiqlar, tenglama va tengsizliklarni isbotlashda matematik induksiya metodidan foydalanish samarali hisoblanadi. Ushbu metod induktiv o'tish orqali natural sonlar to'plami yoki uning biror cheksiz qism to'plamida berilgan ayniyat, tenglik va tengsizliklarni isbotlash orqali umumiy tasdiqning to'g'riligini isbotlashga asoslanganligi, isbotlash umumiy strukturaga egaligi bilan ham o'quvchiga tushunarli va qo'llash qulaydir.

### ANNOTATSIYA

*Ushbu maqolada matematik induksiya metodi, uning umumiy strukturasi va mohiyati haqida hamda ushbu metodning natural parametriga bog'liq ayrim tenglik va ayniyatlarni isbotlashga tatbiqi o'rganildi.*

Matematikada shunday masalalar mavjudki, ba'zi farazlar yakuniy natijalarga ko'ra, noto'g'ri bo'lib chiqadi. Shunday masalalardan biri 1640 yilida tug'ilgan P.Fermaga tegishli. U  $f_n = 2^{2^n} + 1$  ko'rinishidagi natural sonlarning barchasi tub son deb faraz qilingan va faqat  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  lar uchun tekshirilgan. Lekin 1732 yili Leonard Eylar Pyer Fermaning farazini inkor etdi. Buning uchun u  $f_5 = 2^{2^5} + 1$  soni 641 ga bo'linishini ko'rsatdi. P.Ferma nima uchun adashdi degan savol tug'iladi? Uning xatoligi shunda ediki,  $f_n = 2^{2^n} + 1$  bir nechta xususiy qiymatlar uchun hisoblab (bu xususiy tasdiq),  $f_n = 2^{2^n} + 1$  ning qiymati ixtiyoriy  $n$  natural son uchun tub son degan umumiy xulosaga kelgan.



L.Eyler  $f(n) = n^2 + n + 41$  uchhad

Ushbu uchhad  $n$  ning 1 dan 39 gacha qiymatlari uchun tub son bo'lgan. Lekin  $n = 40$  uchun  $f(n) = n^2 + n + 41$  qiymat murakkab son hisoblanadi:  
 $f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$ .

$$f(n) = 991n^2 + 1, n \in N$$

ko'rinishidagi ifoda berilgan.  $n$  sonning o'rniga 1 dan boshlab qiymat berilganda mazkur ifodaning qiymati biror sonning kvadrati bo'lmasdan,  $n = 12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$  bo'lgan holdagina  $f(n) = 991n^2 + 1$  son to'liq kvadrat bo'ladi.

L.Eyler sodda induksiya xatolikka olib kelishi haqida haqiqatni aytgan. Matematikada cheksiz to'plam haqida mulohaza bildirilganda, chekli to'plamni tekshirish isbotlashni almashtira olmaydi.

Shunday qilib, ikkita tushunchani farqlash lozim:

1) Xususiy tasdiq; 2) Umimiy tasdiq.

**Misol.** Quyidagi tasdiqlardan qaysi bir xususiy, qaysi biri umumiy:

1) Nol raqami bilan tugallanuvchi son 5 ga bo'linadi? 2) 140 soni 5 ga bo'linadi?

Umumiy tasdiqdan xususiy tasdiqqa o'tish **deduksiya** deyiladi.

**Misol.** Nol bilan tugallanuvchi son 5 ga bo'linganligi sababli, 140 soni 5 ga bo'linadi.

Xususiy tasdiqdan umumiy tasdiqqa o'tish **induksiya** deyiladi. Induksiya ham to'g'ri, ham noto'g'ri natijaga olib kelishi mumkin.

Induksiya metodi matematikada keng qo'llaniladi, lekin undan to'g'ri foydalanish lozim.

**Tasdiq:** Quyidagi uch xonali sonlar: 140, 150, 250 5 ga bo'linadi.

uchun quydagini tekshirgan:

**Xulosa:** 1) Barcha nol raqami bilan tugallanuvchi sonlar 5 ga bo'linadi (to'g'ri), 2) barcha uch xonali sonlar 5 ga bo'linadi (noto'g'ri).

Shunday savol paydo bo'ladi. To'g'ri xulosa chiqarish uchun matematikada induksiya metodidan qanday foydalanish lozim? Cheksiz sonlar hodisasini tekshirishda qaysi usullar amalga oshiriladi? Bunday usulni B.Pascal va Ya. Bernullilar taklif qilishdi. Bu usul hozirgi kunda matematik induksiya metodi deyiladi. Ushbu metodni ba'zi qadimgi grek olimlari ham foydalanishgan. Dastlab bu metod 1321 yil. Gersonid tomonidan foydalanilgan. XIX asrning ikkinchi yarmigacha bu metod asosiy isbotlash metodi hisoblangan. Shu davrdan boshlab, O.Boltsano, O.L.Koshi, K.F.Gauss, N.X.Abelning ilmiy ishlaridan so'ng, induktiv isbotlashlar o'z ahamiyatini matematikada qisman yo'qotdi.

Matematik induksiya metodini misollar orqali taxlil qilamiz

**Berilgan.** Kitob javonida kitoblar quyidagicha joylashtirilgan: 1) eng chekka qismida joylashgan kitob sariq muqovada. 2) Sariq muqovali kitobning o'ng tomonida sariq muqovali kitob joylashgan.

**Xulosa.** Kitob javonida joylashgan barcha kitoblar sariq muqovada.

"Javonda barcha kitoblar sariq muqovada" xulosasi haqiqatdan ham to'g'ri hosoblanadi. Lekin, agar eng chekkadagi kitob sariq muqovaliligi ma'lum bo'lsa, "javondagi barcha kitoblar sariq muqovali" degan xulosa chiqarish uchun yetarli darajada emas.



Sariq muqovali kitobning o'ng tomonida joylashgan kitob sariq muqovali degan xulosa chiqarishga yetarli emas (Chap tomondagi birinchi kitob yashil muqovada ham bo'lishi mumkin).

Shuning uchun, xulosa to'g'ri bo'lishi uchun ikkala shart ham bajarilishi lozim. Matematika ensiklopediyasida quyidagi tushunchalar berilgan:

**Matematik induksiya** – matematik induksiya prinsipiga asoslangan matematik tasdiqni isbotlovchi metod:

Agar  $A(1)$  isbotlangan bo'lsa,  $x$  natural parametrqa bo'g'liq  $A(x)$  tasdiq isbotlangan deb hisoblanadi va ixtiyoriy  $n$  natural son uchun  $A(n)$  to'g'ri deb faraz qilinsa,  $n+1$  uchun  $A(n+1)$  to'g'ri hisoblanadi.

$A(1)$  tasdiqning isbotlanishi induksiyaning birinchi qadami hisoblanadi,  $A(n)$  uchun farazdan  $A(n+1)$  ning isbotlanishi **induksiyali o'tish** deyiladi. Bunda induksiya parametri deyiladi,  $A(n+1)$  ni isbotlashda  $A(n)$  ni faraz qilish **induktivli faraz** deyiladi.

Matematik induksiya metodining mohiyati quyidagicha:

Agar tasdiqlash ketma-ketligi mavjud bo'lsa, birinchi tasdiq to'g'ri va har bir to'g'ri tasdiqdan so'ng to'g'ri tasdiq

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in N.$$

(1)

*Yechilishi.*  $S_n = 1 + 2 + \dots + n$  orqali belgilaymiz.

**2-qadam.** (1) tenglik  $n=k$  da bajariladi deb faraz qilamiz:

mavjud bo'lsa, ketma-ketlikdagi barcha tasdiq to'g'ri hisoblanadi.

Demak, matematik induksiya metodi yordamida isbotlash ikkita bosqichdan iborat ekan.

**1-qadam.**  $n = 1$  uchun tasdiq to'g'ri.

**2-qadam.** Ixtiyoriy  $n=k$  uchun tasdiq to'g'ri deb faraz qilinsa, u holda, navbatdagi  $n=k+1$  natural son uchun tasdiq to'g'ri deb hisoblanadi.

Agar ikkala qadamda tasdiqlar isbotlangan bo'lsa, matematik induksiya tamoyiliga asoslangan holda, tasdiq ixtiyoriy  $n$  natural son uchun to'g'ri deb xulosa qilinadi.

Barcha natural sonlar uchun emas, balki  $n$  dan katta yoki teng  $m$  natural sonlar uchun induksiya bo'yicha tasdiqni isbotlash zarur bo'ladi. Bunday holda isbotlash quyidagicha bajariladi.

**1-qadam.**  $n = m$  da tasdiq to'g'ri.

**2-qadam.**  $n=k$  da tasdiq to'g'ri berilgan,  $k \geq m$ .  $n = k + 1$  da tasdiq o'rinli ekanligini isbotlash lozim.

Yuqorida keltirilgan tushunchalarni tengliklarni isbotlashga oid masalalar yechishga tadbiiq qilamiz:

**1-masala.** Quyidagi tenglikni isbotlang:

**1-qadam.**  $n = 1$  da  $S_1 = 1$  ga ega bo'lamiz.  $n = 1$  ni (1) tenglikning o'ng tomoniga qo'yamiz:  $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ .  $n=1$  da (1)

tenglikning o'ng va chap tomoni 1 ga teng ekanligini hosil qildik.

$$S_k = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}. \quad (1) \text{ tenglik}$$



$n=k$  uchun o'rinli ekanligini isbotlash lozim:

$$S_{k+1} = 1 + 2 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Haqiqatdan ham:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{=S_k} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

**Yechilishi:**

$$S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \forall n \in N \quad (2)$$

tenglikni isbotlash lozim.

**1-qadam.**  $n=1$  da (2) tenglikning bajarilishini tekshiramiz:

(2) tenglikning chap tomoni quyidagiga ega:  $1^2 = 1$ ;

(2) tenglikning o'ng qismi quyidagiga ega:  $\frac{1(2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot 1 + 1)}{3} = 1$ .

$$S_{k+1} = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

$$\text{Haqiqatdan: } S_{k+1} = \underbrace{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2}_{=S_k} + (2k+1)^2 =$$

$$= \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2 = (2k+1) \cdot \left( \frac{2k^2 + 5k + 3}{3} \right) = \frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$$

tasdiq isbotlandi. Demak, (2) tenglikning ixtiyoriy  $n$  natural sonlar uchun bajarilishi kelib chiqadi.

**3-masala.** Quydagi tenglikning ixtiyoriy  $n$  natural son uchun isbotlang:

**2-masala.** Natural  $(2n-1)$  qatorning dastlabki toq sonlar kvadratlar yig'indisi ixtiyoriy  $n$  natural son uchun  $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$  ga tengligini isbotlang

(2) tenglikning o'ng va chap tomonlari teng, shuning uchun 1-qadam to'g'ri.

**2-qadam.** (2) tenglik  $n=k$  da bajariladi:

$$S_k = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Ushbu tenglik  $n=k+1$  da bajarilishini isbotlash lozim:



$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3). \quad (3)$$

**Yechilishi.**  $S_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$  orqali belgilaymiz.

**1-qadam.**  $n = 1$  da  $S_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3$  ga teng.  $n = 1$  ni (3) tenglikning o'ng tomoniga qo'yamiz:  $\frac{1}{4} 1 \cdot (1+1) \cdot (1+2) \cdot (1+3) = 1 \cdot 2 \cdot 3$ . Natijada  $n = 1$  da (3) tenglikning o'ng va chap

tomoni teng ekanligini hosil qilamiz.

**2-qadam.**  $n=k$  da (3) tenglik

Demak, 1-qadam isbotlandi.

bajariladi deb faraz qilaylik:

$$S_k = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k+1) \cdot (k+2) = \frac{1}{4} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3).$$

$$S_{k+1} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4).$$

Tenglik to'g'riligini isbotlash lozim. Haqiqatdan:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}_{= S_k} + (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) =$$

$$= \frac{1}{4} k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) + (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) =$$

$$= (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \left( \frac{1}{4} k + 1 \right) = \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4).$$

2-qadam isbotlandi. 1- va 2- qadamlardan (3) tenglikning ixtiyoriy  $n$  natural son uchun bajarilishi kelib chiqadi.

**4-masala.** Tenglikni isbotlang

:

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2 \cdot (2n+1)}, \forall n \in N. \quad (4)$$

**Yechilishi.**

$$S_n =$$

**1-qadam.**  $n = 1$  da  $S_1 = \frac{1^2}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3}$  ga

$$\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$$

orqali

ega bo'lamiz. (4) tenglikning o'ng qismiga  $n=1$  ni

belgilaymiz.

qo'yib:  $\frac{1(1+1)}{2 \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3}$  ni hosil qilamiz.

chap qismi teng, shuning uchun 1-qadam isbotlandi.

Demak,  $n = 1$  da (4) tenglikning o'ng va

**2-qadam.** (4) tenglik  $n = k$  da to'g'ri deb faraz qilaylik:

$$S_k = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{k(k+1)}{2 \cdot (2k+1)}.$$

Quyidagi tenglikning to'g'riligini isbotlash lozim:



$$S_{k+1} = \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{(k+1)^2}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2 \cdot (2k+3)}$$

Haqiqatdan ham:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{k^2}{(2k-1) \cdot (2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \\ &= \frac{k(k+1)}{2 \cdot (2k+1)} + \frac{(k+1)^2}{(2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{(k+1) \cdot (2k^2 + 5k + 2)}{2 \cdot (2k+1) \cdot (2k+3)} = \\ &= \frac{(k+1) \cdot 2 \cdot (k+2) \cdot \left(k + \frac{1}{2}\right)}{2 \cdot (2k+1) \cdot (2k+3)} = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2 \cdot (2k+3)}. \end{aligned}$$

2-qadam isbotlandi.

1- va 2- qadamlardan (4) tenglikning ixtiyoriy  $n$  natural son uchun bajarilishi kelib chiqadi.

**5-masala.** Quyidagi tenglikni isbotlang:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2. \quad (5)$$

**Yechilishi.**  $S_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  orqali belgilaymiz.

**1-qadam.**  $n = 2$  da  $S_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$  ga ega bo'lamiz.  $n = 2$  ni (5) tenglikning o'ng qismiga

qo'yamiz:  $\frac{(2+1)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$ . Natijada  $n = 2$  da

(5) tenglikning o'ng va chap qismlari teng bo'ladi. 1-qadam isbotlandi.

**2-qadam.** (5) tenglik  $n=k$  da bajariladi deb faraz qilaylik:

$$S_k = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$$

Quyidagi tenglikning o'rinli ekanligini (5)

tenglik uchun  $n=k+1$  da isbotlash lozim:

$$S_{k+1} = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Haqiqatdan: } S_{k+1} &= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}_{= S_k} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \\ &= \frac{k+1}{2k} \cdot \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}. \end{aligned}$$



2-qadam isbotlandi. 1- va 2- qadamlardan (5) tenglikning ixtiyoriy  $n \geq 2$  natural son uchun bajarilishi kelib chiqadi.

**6-masala.** Quyidagi tenglikni

isbotlang:

$$\underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_n = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \in N. \quad (6)$$

**Yechilishi.**  $S_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_n$  orqali belgilaymiz.

**1-qadam.**  $n = 1$  da  $S_1 = \sqrt{2} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{1+1}}$  ga ega bo'lamiz. 1-qadam isbotlandi.

**2-qadam.** (6) tenglik  $n=k$  da bajariladi deb faraz qilaylik:

$$S_k = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_k = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}. \text{ Quyidagi tenglikning o'rinli ekanligini (6) tenglik}$$

uchun  $n=k+1$  uchun isbotlash lozim:

$$S_{k+1} = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{k+1} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

$$\text{Haqiqatdan: } S_{k+1} = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{k+1} = \sqrt{2 + 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} =$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{2^{k+1}}} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\pi}{2 \cdot 2^{k+1}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{k+2}}.$$

Oxirgi tenglik to'g'ri, chunki  $0 < \frac{\pi}{2^{k+2}} < \frac{\pi}{2}$ .

**7-masala.** Quyidagi tenglikni

isbotlang:

2-teorema isbotlandi. 1- va 2- qadamlardan (6) tenglikning ixtiyoriy  $n$  natural son uchun bajarilishi kelib chiqadi.

$$\frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 4} + \frac{1}{\ln 4 \cdot \ln 8} + \dots + \frac{1}{\ln 2^{n-1} \cdot \ln 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\ln^2 2}, \forall n \in N : n \geq 2. \quad (7)$$

**Yechilishi.**  $S_n = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 4} + \frac{1}{\ln 4 \cdot \ln 8} + \dots + \frac{1}{\ln 2^{n-1} \cdot \ln 2^n}$  orqali belgilaymiz.

**1-qadam.**  $n = 2$  da (7) tenglikning chap qismi:  $\frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 4} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln^2 2}$  ga

teng.  $n = 2$  ni (7) tenglikning o'ng qismiga qo'yamiz:  $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\ln^2 2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\ln^2 2}$ . Natijada  $n = 2$

qiymatda (7) tenglikning o'ng va chap qismlari teng. 1-qadam isbotlandi.

**2-qadam.** (7) tenglik  $n=k$  da bajariladi deb faraz qilaylik:



$$S_k = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 4} + \frac{1}{\ln 4 \cdot \ln 8} + \dots + \frac{1}{\ln 2^{k-1} \cdot \ln 2^k} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{\ln^2 2}.$$

Quyidagi tenglikning o'rinli ekanligini (7) tenglik uchun  $n=k+1$  da isbotlash lozim:

$$S_{k+1} = \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 4} + \frac{1}{\ln 4 \cdot \ln 8} + \dots + \frac{1}{\ln 2^k \cdot \ln 2^{k+1}} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{\ln^2 2}.$$

Haqiqatdan:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 4} + \frac{1}{\ln 4 \cdot \ln 8} + \dots + \frac{1}{\ln 2^{k-1} \cdot \ln 2^k} + \frac{1}{\ln 2^k \cdot \ln 2^{k+1}} = \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{\ln 2 \cdot \ln 4} + \frac{1}{\ln 4 \cdot \ln 8} + \dots + \frac{1}{\ln 2^{k-1} \cdot \ln 2^k}\right)}_{=S_k} + \frac{1}{\ln 2^k \cdot \ln 2^{k+1}} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{\ln^2 2} + \frac{1}{\ln 2^k \cdot \ln 2^{k+1}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{\ln^2 2} + \frac{1}{k \cdot (k+1) \cdot \ln^2 2} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{\ln^2 2} = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \frac{1}{\ln^2 2}. \end{aligned}$$

2-qadam isbotlandi. 1- va 2- qadamlardan (7) tenglikning ixtiyoriy  $n \geq 2$  natural son uchun bajarilishi kelib chiqadi.

**8-masala.** Quyidagi ayniyatni isbotlang:

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{n}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x}, \quad n \neq 2k\pi, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

**Yechilishi.**  $S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$  orqali belgilaymiz.

$$\mathbf{1-qadam.} \quad n = 1 \text{ da } S_1 = \sin x = \frac{\sin \frac{1+1}{2} x \cdot \sin \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \text{ ga ega bo'lamiz.}$$

1-qadam isbotlandi.

2-qadam. (8) tenglik  $n=k$  da bajariladi deb faraz qilaylik:

$$S_k = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx = \frac{\sin \frac{k+1}{2} x \cdot \sin \frac{k}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x}. \text{ Quyidagi tenglikning o'rinli ekanligini}$$

(8) tenglik uchun  $n=k+1$  da isbotlash lozim:

$$S_{k+1} = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin(k+1)x = \frac{\sin \frac{k+2}{2} x \cdot \sin \frac{k+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x}.$$



$$\begin{aligned}
 \text{Haqiqatdan ham: } S_{k+1} &= \underbrace{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx}_{=S_k} + \sin(k+1)x = \\
 &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} + \sin \frac{2(k+1)x}{2} = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \cdot \sin \frac{k}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} + 2\sin \frac{k+1}{2}x \cdot \cos \frac{k+1}{2}x = \\
 &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} \left( \sin \frac{k}{2}x + 2 \cdot \cos \left( \frac{k}{2}x + \frac{1}{2}x \right) \cdot \sin \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} \left( \sin \frac{k}{2}x + 2 \cdot \left( \cos \frac{k}{2}x \cdot \cos \frac{1}{2}x - \sin \frac{k}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}x \right) \cdot \sin \frac{1}{2}x \right) = \\
 &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} \left( \sin \frac{k}{2}x \cdot \underbrace{(1 - 2 \cdot \sin^2 \frac{1}{2}x)}_{=\frac{1-\cos x}{2}} + \cos \frac{k}{2}x \cdot \underbrace{2 \cdot \cos \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}x}_{=\sin x} \right) = \\
 &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x} \left( \sin \frac{k}{2}x \cdot \cos x + \cos \frac{k}{2}x \cdot \sin x \right) = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \cdot \sin \frac{k+2}{2}x}{\sin \frac{1}{2}x}.
 \end{aligned}$$

2-qadam isbotlandi.

1- va 2- qadamlardan (8) tenglikning ixtiyoriy  $n$  natural son uchun bajarilishi kelib chiqadi.

**9-masala.** Muavr formulasini isbotlang:

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \forall n \in N. \quad (9)$$

**1-qadam.**  $n = 1$  da  $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^1 = r^1 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$  ga ega bo'lamiz. 1-qadam isbotlandi.

2-qadam. (9) tenglik  $n=k$  da bajariladi deb faraz qilaylik:

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi).$$

Quyidagi tenglikning o'rinli ekanligini (9) tenglik uchun  $n=k+1$  da isbotlash lozim:

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{k+1} = r^{k+1} (\cos(k+1)\varphi + i \sin(k+1)\varphi).$$

$$\text{Haqiqatdan: } (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{k+1} = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^k \cdot (r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) =$$



$$\begin{aligned} &= r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)(r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) = i^2 = -1 \\ &= r^{k+1} (\cos k\varphi \cdot \cos \varphi - \sin k\varphi \cdot \sin \varphi + i(\cos k\varphi \cdot \sin \varphi + \sin k\varphi \cdot \cos \varphi)) = \\ &= r^{k+1} (\cos(k+1)\varphi + i \sin(k+1)\varphi). \end{aligned}$$

2-qadam isbotlandi.

1- va 2- qadamlardan (9) tenglikning ixtiyoriy  $n$  natural son uchun bajarilishi kelib chiqadi.

Ushbu maqolada matematik induksiya metodi, uning umumiy strukturasi va mohiyati haqida hamda ushbu metodning natural parametrغا bog'liq ayrim tenglik va ayniyatlarni isbotlashga tatbiqi o'rganildi. Matematik induksiya metodining asosiy

tamoyillarini o'quvchilarga o'rgatish, ulardan amalda foydalanish va o'quvchilarni bilim, ko'nikma va malakalarini yuksaltirishdan iboratdir.

Qolaversa ushbu matematik induksiya metodini puxta o'rganish orqali kelgusida yoshlarga samarali saboq berish, ularni matematikaga bo'lgan qiziqishlarini ortirish uchun muhim ahamiyatga ega deb hisoblaymiz.

### FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Abduraxmonov B.A. Matematik induksiya metodi. Toshkent. 2008.
2. Соловьев Ю. П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Ч. 1 - 3. — М.: школа им. А. Н. Колмогорова, 1998.
3. Соминский И. С. Метод математической индукции. Серия «популярные лекции по математике» — Вып. 3. — М.: Наука, 1974.
4. Николаева С.А. Метод математической индукции: методическое пособие для учителей и учащихся, М., 2015.
5. Шень А. Математическая индукция. |5-е изд., стереотип. |М.: МЦНМО, 2016.
6. Леонтьева А.В. Сборник задач (метод математической индукции): Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014.