



BERTRANNING POSTULATI VA UNING ISBOTI HAQIDA

G'oymatova Dilafruz

Andijan Mashinasozlik Instituti

"Transport logistikasi" kafedrası assistenti

<https://www.doi.org/10.5281/zenodo.7862032>

ARTICLE INFO

Received: 15th April 2023

Accepted: 24th April 2023

Online: 25th April 2023

KEY WORDS

Sonli ketma-ketlik, tub sonlar, binomial ko'effisiyentlar, ifodalash, Riman gipotezasi, dzeta funksiyaning no'llari, tub sonlar mavjud bo'lgan oraliqlar.

ABSTRACT

Maqolada tub sonlar mavjud bo'lgan oraliqlar masalasi qaralgan. Shu sohada olingan natijalar keltirilgan. Binomial ko'effisiyentlardan foydalanib Bertran postulatining nisbatan sodda isboti keltirilgan.

Tub sonlarni saqllovchi oraliqlar masalasida ko'p sonli tekshirishlardan so'ng 1845 yilda Bertran [1] agar $n \geq 4$ bo'lsa $[n, 2n - 3]$ interval kamida birta tub sonni o'zida saqlaydi degan taxminni e'lon qilganidan keyin muhim ahamiyat kasb eta boshladi.

Hozirgi vaqtga kelib $x > x_0$ bo'lganda $[x, x + x^{0,525}]$ interval hech bo'lmasa birorta tub sonni o'zida saqlaydi degan mulohaza mavjud [2]. Agar Rimanning umumlashgan gipotezasi o'rinli bo'lsa $[x - K\sqrt{x}\ln x, x]$ intervalning hech bo'lmasa birorta tub sonni saqlashi ko'rsatilgan. Bu yerda $K > 1$ yetarlicha katta effektiv hisoblanadigan konstanta bo'lib, x yetarlicha katta son. Шенфельд teoremasidan kelib chiqadiki, agar Rimanning umumlashgan gipotezasi o'rinli bo'lib $x \geq 599$ bo'lsa, u holda $[x - \frac{\sqrt{x}\log^2 x}{4\pi}, x]$ interval hech bo'lmasa birorta tub sonni o'zida saqlaydi degan tasqiq kelib chiqadi. Bu hozircha tahmin qilinayotgan $K > 1$ va $x \geq x_0(K)$ barcha sonlar uchun $[x - K\log^2 x, x]$ interval kamida bitta tub sonni o'zida saqlaydi degan natijadan ancha uzoq. 1976 yilga kelib quyidagi teorema isbotlandi: agar $x \geq 2\,010\,760$ bo'lsa, u holda $[x(1 - \frac{1}{16597}), x]$ interval kamida bitta tub sonni saqlaydi. 2002 yilda quyidagi teorema isbotlandi: agar $x \geq 10\,726\,905\,041$ bo'lsa, u holda $[x(1 - \frac{1}{28314000}), x]$ interval kamida bitta tub sonni saqlaydi. Keyinchalik 2002 yilda agar

$x \geq \exp(53)$ bo'lsa, u holda $[x(1 - \frac{1}{204\,879\,661}), x]$ interval kamida bitta tub sonni saqlashi isbotlandi. 2004 yilda agar $x \geq \exp(60)$ bo'lsa u holda

$[x(1 - \frac{1}{14\,500\,755\,538}), x]$ interval kamida bitta tub sonni saqlaydi lekin bu shartli natija, chunki uning isbotida Rimanning gipotezasi o'rinli deb foydalanilgan.



2016 yilda agar $x \geq 2\,898\,242$ bo'lsa u holda $\left[x, x\left(1 + \frac{1}{111(\log x)^2}\right)\right]$ interval kamida bitta tub sonni saqlaydi degan shartli natija isbotlandi.

2019 yilda quyidagi teorema isbotlandi: agar $x \geq 4$ bo'lib Rimanning gipotezasi o'rinli bo'lsa u holda $\left[x - \frac{8}{5}\sqrt{x}\log x, x\right]$ oraliq kamida bitta tub sonni o'zida saqlaydi.

Shuni ham ta'kidlash kerakki bu keltirilgan natijalarning ko'pchiligi shartli natijalardir.

Biz quyida Bertran gipotezasining Erdiyosh tomonidan berilgan isbotini aniqlashtirilgan holda keltiramiz.

Bu postulatni fransuz matematigi bertran Bertran gipoteza sifatida 1845-yilda aytib o'tgan. Uning o'zi gipotezani to'g'ri ekanligini $n=3000000$ qiymatlari uchun tekshirgan. Gipoteza isbotini esa 1852-yilda P.L.Chebeshhev tomonidan isbotlangan [1]. 1919-yilda xind matematigi Ramanudjan uning sodda isbotini topdi. Erdiyosh 1930-yilda bu isbotni yana ham soddaroq holga keltiradi. Bertran postulatining umumlashmasi sifatida quyidagi tasdiqni keltirib o'tishimiz mumkin. Agar $n \geq 2k$ $n - k + 1, \dots, n - 1$ sonlari orasida k dan katta tub bo'luvchiga ega bo'lgan son mavjud. Bu tasdiq 1892-yilda Silvester tomopnidan isbotlangan. Xususiyl holda $n = 2k$ bo'lganda bu tasdiq Bertran gipotezasini beradi. Tub sonlarni taqsimoti haqidagi teoremadan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 topiladiki $n \geq n_0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n lar uchun $n < p < (1 + \varepsilon)n$ munosabatni qanoatlantiruvchi p tub soni mavjud. Agar ε fikserlangan bo'lsa bu oraliqdagi tub sonlar soni cheksizlikka intiladi [3]. Xususiyl holda masalan $n \geq 25$ bo'lsa n va $(1 + 1/5)n$ sonlari orasida doimo tub son mavjud bo'ladi [4]. Endi Bertran postulate isbotiga o'tamiz. Biz bu yerda yuqorida qayd etganimizdek Erdiyosh tomonidan taklif etilgan isbotdan va quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: C_a^b - a ta elementdan b tadan tuzilgan gruppalar soni, $[x]$ - x ning butun qismi, $\mathbb{P}$ - tub sonlar to'plamini, $\theta(n)$ ni $\theta(n) = \sum_{p \in \mathbb{P}, p \leq n} \ln p$ tenglik orqali aniqlaymiz. Bu funksiyani Chebeshhevning θ - funksiyasi deb ataladi.

Avvalo quyidagi lemmani isbotlaymiz.

Lemma. Barcha $n \geq 1$ lar uchun $\theta(n) < n \cdot \ln 4$ tengsizlik bajariladi.

Isboti. m ixtiyoriy natural son bo'lganda C_{2m+1}^m kombinatsiya $[m + 2, 2m + 1]$ oraliqdagi barcha tub sonlarga bo'linadi. Haqiqatdan ham, $C_{2m+1}^m = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$ bo'lib, yuqoridagi intervaldagi ixtiyoriy tub son bu kasrning suratini bo'ladi lekin maxraji unga bo'linmaydi. Bu binomial koeffisient shunday barcha tub sonlarga bo'lingani uchun ularning ko'paytmasidan kichik bo'la olmaydi, ya'ni $C_{2m+1}^m \geq \prod_{p \in \mathbb{P}, m+2 \leq p \leq 2m+1} p$. Bu munosabatning ikkala tomonini logarifmlasak quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ln(C_{2m+1}^m) \geq \prod_{p \in \mathbb{P}, m+2 \leq p \leq 2m+1} \ln p = \theta(2m+1) - \theta(m+1).$$

Ikkinchi tomondan esa C_{2m+1}^m ni quyidagicha yuqoridan baholash mumkin:

$$C_{2m+1}^m = \frac{C_{2m+1}^m + C_{2m+1}^m}{2} \leq \frac{\sum_{k=0}^{2m+1} C_{2m+1}^k}{2} = \frac{(1+1)^{2m+1}}{2} = 4^m.$$

Bu oxirgi ikkita tengsizlikdan $\theta(2m+1) - \theta(m+1) \leq \ln 4^m = m \ln 4$ ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa $\theta(2m+1) \leq \theta(m+1) + m \ln 4$ ga ega bo'lamiz.

Endi lemmani induksiya metodidan foydalanib isbotlash mumkin.



$n = 1$ da $\theta(1) = 0 < 1 \cdot \ln 4$; $n = 2$ da esa $\theta(2) = \ln 2 < 2 \cdot \ln 4$ larga ega bo'lamiz, ya'ni $n = 1$ va $n = 2$ da lemma o'rinli.

Endi faraz qilaylik $n > 2$ bo'lsin va toq son bo'lsin. Aniqlik uchun $n = 2m + 1$ deb olamiz. Bu holda yuqoridagi formuladan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\theta(2m + 1) \leq \theta(m + 1) + m \ln 4 < (m + 1) \ln 4 + m \ln 4 = (2m + 1) \ln 4 = n \ln 4.$$

Endi faraz qilaylik $n > 2$ juft son bo'lsin. U holda $\theta(n) = \theta(n - 1) < (n - 1) \cdot \ln 4 < n \cdot \ln 4$ va 2 dan katta barcha juft sonlar murakkab sonlar bo'lgani uchun $\ln n$ qo'shiluvchi $\sum_{p \in \mathbb{P}; p \leq n} \ln p$ ga kirmaydi, shunday qilib lemma to'la isbotlandi.

Endi postulatning bevosita isbotiga o'tamiz. Isbotning asosiy ma'nosi C_{2n}^n binomial koeffisientni tub ko'paytuvchilarga ajratishdan iboratdir. Agarda n va $2n$ sonlar orasida tub sonlar mavjud bo'lmasa, bu tub ko'paytuvchilarning ko'paytmasi juda ham kichik bo'ladi. Biz teoremani teskarisini faraz qilish yo'li bilan isbotlaymiz. Faraz qilaylik biror $n \geq 2$ butun soni uchun $n < p < 2n$ shartni qanoatlantiruvchi p tub soni mavjud bo'lmasin. Agarda $2 \leq n < 2048$ bo'lsa, 3,5,7,13,23,43,83,163,317,631,1259 va 2503 yuqoridagi shartni qanoatlantiradi, shuning uchun ham $n \geq 2048$ deb olishimiz mumkin. C_{2n}^n ni baholaymiz.

$4^n = (1 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k$ tenglik o'rinli. Bu yerda eng katta had C_{2n}^n uchun quyidagi tengsizlik o'rinli: $\frac{4^n}{2n+1} \leq C_{2n}^n$.

Faraz qilaylik, $R(p, n) = C_{2n}^n$ sonini tub ko'paytuvchilarga yoyilmasi p tub sonining darajasi bo'lsin. U holda $C_{2n}^n = \prod_p p^{R(p, n)}$ deb yozaolamiz. $n!$ sonida p^j bo'linadigan sonlarning soni $\left[\frac{n}{p^j} \right]$ butun qismiga teng bo'lgani uchun,

$$R(p, n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{2n}{p^j} \right] - 2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^j} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^j} \right] \right) \text{ deb yoza olamiz.}$$

Bu yerda $\left[\frac{2n}{p^j} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^j} \right]$ qo'shiluvchi 0 yoki 1 ga teng bo'ladi, bu $\frac{n}{p^j}$ ning kasr qismiga bog'liq agar u $\frac{1}{2}$ dan kichik bo'lsa 0 ga teng, agar $\frac{1}{2}$ dan katta yoki teng bo'lsa 1 ga teng bo'ladi. Yuqoridagi formuladan: $j > \frac{\ln(2n)}{\ln(p)}$ bo'lgan barcha hadlar 0 ga teng bo'ladi, chunki bu holda $\frac{2n}{p^j} < 1$. Shunday qilib $R(p, n)$ yig'indida

$$\left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right] \text{ ta qo'shiluvchi mavjud va bu qo'shiluvchilarning har biri 0 yoki 1 ga teng.}$$

shuning uchun ham $R(p, n) \leq \left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right]$ deb ayta olamiz.

Endi $p^{R(p, n)}$ baholaymiz. Ihtiyoriy p uchun

$$p^{R(p, n)} = \exp(R(p, n) \ln p) \leq \exp \left(\left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right] \ln p \right) \leq 2n. \text{ Lekin } \sqrt{2n} < p \leq 2n \text{ bo'lganda}$$

bunga qaraganda ancha aniq formula olish mumkin. Bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi p lar uchun 1 ga teng bo'lgan qo'shiluvchilar soni

$\left[\frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right]$, shuning uchun ham $R(p, n) = \left[\frac{2n}{p} \right] - 2 \left[\frac{n}{p} \right]$. Agar bu qo'shiluvchi 1 ga teng bo'lsa $p^{R(p, n)} = p$ bo'ladi. Agar bu qo'shiluvchi 0 ga teng bo'lsa $p^{R(p, n)} = 1$ bo'ladi.

Endi tub bo'luvchilarning qaysi intervalda yotishini aniqlaymiz.

Qaralayotgan C_{2n}^n soni quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi tub bo'luvchilar ega bo'lamiydi:



1. Agar $2n < p$ bo'lsa, chunki bu holda $R(p, n) \leq \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln(p)} \right\rfloor = 0$ bajaradi.
2. $n < p \leq 2n$ bo'lsa, chunki biz bu intervalda tub son mavjud bo'lmasin deb faraz qilgan edik.
3. $\frac{2n}{3} < p \leq n$ bo'lsa, chunki bu holda $p > \sqrt{2n}$ ($n \geq 5$) bo'lib,
 $R(p, n) = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 2 - 2 = 0$ bo'ladi. Demak C_{2n}^n soni $\frac{2n}{3}$ sonidan katta tub bo'luvchilarga ega emas.

Endi C_{2n}^n sonini tub bo'luvchilari p bo'yicha $p^{R(p,n)}$ larning ko'paytmasini baholaymiz. $\sqrt{2n}$ dan katta bo'lmagan bo'luvchilar uchun bu ko'paytma, $(2n)^{\sqrt{2n}}$. $\sqrt{2n}$ sonidan katta bo'la olmaydi, $\sqrt{2n}$ dan katta tub bo'luvchilar uchun esa bu ko'paytma $\prod_{p \in P; p \leq 2n/3} p = \exp\left(\theta\left(\frac{2n}{3}\right)\right)$ dan katta emas. C_{2n}^n soni $p^{R(p,n)}$ sonining barcha p lar uchun ko'paytmasidan iborat bo'lganligi uchun quyidagiga ega bo'lamiz: $\frac{4^n}{2n+1} \leq C_{2n}^n \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \exp\left(\theta\left(\frac{2n}{3}\right)\right)$, yuqorida isbotlagan formulamizdan foydalansak $\theta(n) < n \cdot \ln(4)$ bo'lgani uchun: $\frac{4^n}{2n+1} < (2n)^{\sqrt{2n}} 4^{\frac{2n}{3}}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Endi $(2n+1) < (2n)^2$ bo'lganidan: $4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{2+\sqrt{2n}}$ hosil qilamiz. Bundan tashqari $2 \leq \frac{\sqrt{2n}}{3}$ ($n \geq 18$) bo'lgani uchun: $4^{\frac{n}{3}} < (2n)^{\frac{4}{3}\sqrt{2n}}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ikkala tomonni logarifmlab tengsizlikni hosil qilamiz $\sqrt{2n} \ln(2) < 4 \cdot \ln(2n)$. $2^{2t} = 2n$ deb belgilash olsak: $\frac{2^t}{t} < 8$ $t < 6$ tengsizlik o'rinli ekanligini ko'ramiz. Bu esa bizning shartimizga qarama qarshidir chunki $\frac{2^{2t}}{2} < \frac{2^{2 \cdot 6}}{2} = 2048$. Shunday qilib bizning farazimiz noto'g'ri ($n, 2n$) oraliqda kamida bitta tub son mavjud bo'larkan.

References:

1. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. –М. “Мир”, 1975, -272с.
2. Dudek A.W. Explicit estimates in the theory prime numbers. Australian National university. Arxiv: 1611.07251v1 [math.NT] 22 nov 2016, 105p.
3. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. –М. “Наука”, 1975, -272с.
4. Oliver Ramare. Short intervals containing primes. The Time-EMT project 14th, 2017.