

BIR O'LCHAMLI UYURMA TENGLAMASINI SONLI MODELLASHTIRISH

XOLMIRZAYEVA NILUFAR ABDIMUROTOVNA

Termiz davlat universiteti magistranti

<https://doi.org/10.5281/zenodo.6616399>

ARTICLE INFO

Received: 28th May 2022

Accepted: 02nd June 2022

Online: 05th June 2022

KEY WORDS

Navye-Stoks tenglamasi, uyurma tenglamasi, tok funksiyasi, ayirmali approksimatsiya, progonka metodi, iteratsiya, sinov funksiyasi, aniq yechim, taqribiy yechim.

ABSTRACT

Elliptik tipga mansub bo'lgan tenglamalarni sonli yechishga mo'ljallangan bir qator bevosita yechish metodlari va iteratsiya metodlari mavjud bo'lsada, ularning samaradorligi masalasi hozirgacha dolzarb bo'lib kelayapti. Shu maqsadda bir o'lchamli uyurma tenglamasini ayirmali sxemalar yordamida approksimatsiyalab iteratsion metod bilan yechish yuqori aniqlikdagi natijalar berishi ko'rsatilgan. Sonli yechimlar jadval va grafik ko'rinishda taqdim etilgan.

1. Kirish

Ushbu maqolada bir o'lchamli Navye-Stoks tenglamasini uyurma tok funksiyasi tizimida chiziqli ayirmali sxemalar orqali matematik modellashtirish, matematik modelga mos tenglamani yechish algoritmini tuzish, algoritmgaga mos kompyuter dasturini tuzish va undan olingan natijalarni tahlil qilish masalalarini qaraymiz.

2. Masalaning qo'yilishi.

Bir o'lchamli holat uchun uyurma tenglamasi $0 \leq x \leq 1$ kesmada quyidagicha ko'rinishga ega [2]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \psi \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + Q(t, x) \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\omega$$

(2)

Bu yerda x - fazoviy koordinata, t - vaqt, ω - uyurma tenglamasi, ψ - tok funksiyasi tenglamasi, $Q(t, x)$ - ma'lum funksiya.

Tenglama (1)-(2) ni Navye-Stoks tenglamalar sistemasining bir o'lchamli modeli sifatida qarashimiz mumkin.

Masalaning qo'yilishi to'liq bo'lishi uchun (1), (2) tenglamalarga quyidagi ko'rinishdagi boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qo'shamiz:

$$\psi(0, x) = 0, \quad \omega(0, x) = 0, \quad (3)$$

$$\psi(t, 0) = \psi(t, 1) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 1) = 0. \quad (4)$$



Sinov funksiyasi uchun
 $Q(t, x) = Q(x) = 24 + 12x^2(1 - x^2)(1 - 2x)$
 deb olamiz.
 $[0, 1]$ kesmada teng oraliqli
 $\Omega_h : \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, M, h = 1/M\}$ to'rt
 kiritamiz, t o'zgaruvchi bo'yicha esa
 $\Omega_\tau : \{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, \tau = 1/N\}$ to'rni
 kiritamiz. $\Omega = \Omega_h \times \Omega_\tau$ to'rda ayirmali
 sxemalar teoriyalaridagi belgilangan
 standartlar asosida[3] oshkormas sxema
 bo'yicha (1)-(2) tenglamalarning ayirmali
 approksimatsiyasini yozamiz:

$$\frac{\omega_i^{j+1} - \omega_i^j}{\tau} + \Psi_i^j \frac{\omega_{i+1}^{j+1} - \omega_{i-1}^{j+1}}{2h} =$$

$$= \frac{\omega_{i+1}^{j+1} - 2\omega_i^{j+1} + \omega_{i-1}^{j+1}}{h^2} + 24 + 12x^2(1 - x^2)(1 - 2x)$$

(5)

$$\frac{\Psi_{i+1}^{j+1} - 2\Psi_i^{j+1} + \Psi_{i-1}^{j+1}}{h^2} = -\omega_i^{j+1}$$

$$i = \overline{1, M-1} \quad (6)$$

Endi (3) va (4) tenglamalarning
 quyidagicha approksimatsiyalaymiz:

$$\psi_i^0 = 0, \omega_i^0 = 0, i = \overline{0, M-1},$$

(7)

$$\psi_0^{j+1} = 0, \psi_M^{j+1} = 0,$$

$$\frac{\psi_1^{j+1} - \psi_0^{j+1}}{h} = 0, \frac{\psi_M^{j+1} - \psi_{M-1}^{j+1}}{h} = 0.$$

(8)

(4) ni approksimatsiya qilishda Vuds
 shartidan foydalanamiz[2]:

$$\omega_0^{j+1} + \frac{\omega_1^{j+1}}{2} = \frac{3(\psi_0^j - \psi_1^j)}{h^2}$$

(9)

Shunday qilib, (1)-(4) differensial
 masalaning qo'yilishini approksimatsiyalab
 (5)-(9) ayirmali masalaga keldik.

3. Yechish metodi va algoritmi.

(5) tenglamani quyidagi ko'rinishga
 keltiramiz[4]:

$$A_i \omega_{i-1}^{j+1} - C_i \omega_i^{j+1} + B_i \omega_{i+1}^{j+1} = -F_i,$$

$$i = \overline{1, M-1} \quad (10)$$

bu yerda $A_i = \frac{\tau}{h^2} + \frac{\tau}{2h} \psi_i^j,$

$$B_i = \frac{\tau}{h^2} - \frac{\tau}{2h} \psi_i^j,$$

$$C_i = \frac{2\tau}{h^2} + 1,$$

$$F_i = (24 + 12(ih)^2(1 - ih)^2(1 - 2ih))\tau + \omega_i^j$$

(6) ni quyidagi algebraik tenglamalar
 sistemasiga keltiramiz[4]:

$$A_i \psi_{i-1}^{j+1} - C_i \psi_i^{j+1} + B_i \psi_{i+1}^{j+1} = -F_{1i} \quad i = \overline{1, M-1}$$

(11)

bu yerda $A_1 = 1, B_1 = 1, C_1 = 2,$

$$F_{1i} = h^2 \omega_i^{j+1}$$

(10) ayirmali tenglamani progonka usulini
 qo'llab sonli yechamiz, yechimni quyidagi
 ko'rinishda izlaymiz:

$$\omega_i^{j+1} = \alpha_{i+1} \omega_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}, \quad i = M-1, M-2, \dots, 1, 0.$$

(12)

α_i, β_i progonka koefitsiyentlari quyidagi
 formulalar yordamida topiladi[4]:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = \overline{1, M-1}$$

(13)

(12) da $i = 0$ bersak, quyidagiga ega
 bo'lmamiz:



$$\omega_0^{j+1} = \alpha_1 \omega_1^{j+1} + \beta_1, \quad (14)$$

(9) Vuds shartidan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\omega_0^{j+1} = -\frac{1}{2} \omega_1^{j+1} + \frac{3(\psi_0^j - \psi_1^j)}{h^2}, \quad (15)$$

(14) va (15) shartlarni tenglab α_1 va β_1 ning qiymatlarini topamiz:

$$\alpha_1 = -0.5, \quad \beta_1 = \frac{3(\psi_0^j - \psi_1^j)}{h^2}. \quad (16)$$

(11) sistemani yechish uchun progonka usulini qo'llaymiz. Progonka koeffitsiyentlari quyidagi ko'rinishda topiladi[4]:

(19) dan esa $\xi_1 = 0$ va $\eta_1 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Ushbu metodda xisoblash algoritmining umumiy borishi quyidigicha:

1-qadam. (7) va (8) boshlang'ich va chegaraviy shartlar aproksimatsiyasi asosida ω va ψ funksiyalarning dastlabki qiymatlari topiladi.

2-qadam. ψ ning dastlabki qiymatlari va (10) tenglamani progonka metodi bilan yechish natijasida ω ning keyingi qatlamdagi qiymatlari topiladi.

3-qadam. 2-qadamda topilgan ω ning qiymatlari yordamida (11) ayirmli tenglamanin koeffitsiyentlari aniqlanadi va progonka usulini qo'llab ψ ning keyingi qatlamdagi qiymatlari topiladi.

Yuqorida bayon etilgan metod algoritmi bo'yicha kompter dasturidan olingan natijadan foydalanib, vaqt bo'yicha $k=100$

$$\xi_{i+1} = \frac{B_1}{C_1 - \xi_i A_1}, \quad \eta_{i+1} = \frac{A_1 \eta_i + F_1}{C_1 - \xi_i A_1}, \quad i = \overline{1, M-1} \quad (17)$$

Progonkaning teskari yo'li bo'yicha yechimni quyidagi ko'rinishda topamiz:

$$\psi_i^{j+1} = \xi_{i+1} \psi_{i+1}^{j+1} + \eta_{i+1}, \quad i = M-1, M-2, \dots, 1, 0. \quad (18)$$

(18) da $i=0$ bersak, quyidagiga ega bo'lmamiz: $\psi_0^{j+1} = \xi_1 \psi_1^{j+1} + \eta_1$ va (4) ga

ko'ra $\psi_0^{j+1} = 0$ ekanligidan:

$$\psi_0^{j+1} = \xi_1 \psi_1^{j+1} + \eta_1 = 0 \quad (19)$$

4-qadam. 3-qadamda topilgan ψ ning qiymatlari 2-qadam ga dastlabki qiymat sifatida uzatiladi.

Ushbu 2-, 3-, 4-qadamlar ketma-ketligi berilgan iteratsiya soni nechaga teng bo'lsa shuncha marta bajariladi. Iteratsiya sonining oshishi yechimlar aniqligining oshishiga olib keladi.

4. Xisoblash natijalari.

Koordinata bo'yicha qadamlar sonini $M=20$ va vaqt bo'yicha qadamlar sonini $N=100$ qiymatlar bo'yicha xar ikkala yo'nalish bo'yicha to'r qadamlarini aniqlab олаmиз:

$$\Omega_h : \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, M, h = 1/M = 0,05\} \quad \text{va}$$

$$\Omega_\tau : \{t_k = k\tau, k = 0, 1, \dots, \tau = 1/N = 0,01\}$$

qadamdagi ψ funksiyaning qiymatlarini $Q(x)$ sinov funksiyasining aniq qiymatlari bilan mosligi quyidagi jadvalda keltirilg

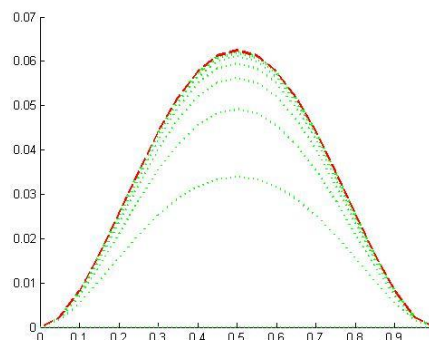


Koordinata bo'yicha qadamlar	Taqribiy yechim	Aniq yechim	Koordinata bo'yicha qadamlar	Taqribiy yechim	Aniq yechim
1	0	0	11	0.0624	0.0625
2	0.0023	0.0023	12	0.0612	0.0613
3	0.0081	0.0081	13	0.0576	0.0576
4	0.0163	0.0163	14	0.0517	0.0518
5	0.0256	0.0256	15	0.0441	0.0441
6	0.0351	0.0352	16	0.0352	0.0352
7	0.0441	0.0441	17	0.0256	0.0256
8	0.0517	0.0518	18	0.0163	0.0163
9	0.0576	0.0576	19	0.0081	0.0081
10	0.0612	0.0613	20	0.0023	0.0023

1-jadval. Vaqt bo'yicha $k=100$ - qadamdagi ψ funksiyaning qiymatlarini $Q(x)$ sinov funksiyasining qiymatlari bilan mosligi.

1-jadvalda ψ funksiyaning ushbu qiymatlari iteratsiyaning 100 - qadamida sinov funksiyasining aniq yechimiga yuqori aniqlikda yaqinlashishini ko'rishimiz

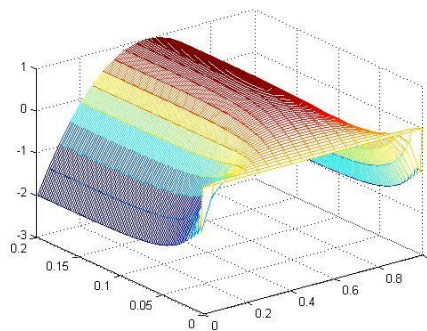
mumkin. Xar bir iteratsiyada ψ funksiyasining qiymatlari aniq yechimga tobora yaqinlashishi quyida grafik ko'rinishda tasvirlangan:



1-rasm. Taqribiy yechimning xar bir iteratsiyadagi qiymatlarining aniq yechimga yaqinlashishi. (Bu yerda yashil chiziqlar – taqribiy yechim qiymatlari, qizil chiziq – aniq yechim.)

Ushbu rasmda ψ funksiyaning dastlabki 60 ta iteratsiyaning xar 10-iteratsiyadagi qiymatlari grafigi tasvirlangan. Ko'rinib turibdiki taqribiy yechim 61-qadamdan oq aniq yechimga yaqinlashar ekan.

Kompyuter programasi xisoblash natijalariga ko'ra ω funksiyaning qiymatlari grafigini quyidagi rasmda ko'rishimiz mumkin:



2-rasm. Vaqt bo'yicha dastlabki 100 ta qadamda ω – uyurma tenglamasi yechimlari grafigi.

5. Xulosa.

Uyurma tenglamasini sonli modellashtirish va yechish fan va texnikaning ko'plab sohalaridagi hodisalarni kompyuterli modellashtirish va ularga oid xisob-kitoblarda muhim xulosalarga kelishda katta ahamiyat kasb etadi.

Bir o'lchamli Navye-Stoks tenglamasini uyurma-tok funksiyasi tizimida yechishda ikkala noma'lum funksiyalar qiymatlarini topishda progonka metodidan foydalaniladi.

Bir o'lchamli uyurma tenglamasini chiziqli ayirmali sxema yordamida sonli yechish iteratsiya qadamlarin yetarlicha kichik olinganda aniq yechimga juda yuqori aniqlikda yaqinlashuvchi taqribiy yechim qiymatlarini beradi.

1-jadvalda ψ funksiyaning $h=0.05$, $\tau=0.01$ ga teng bo'lgan holdagi qiymatlari iteratsiyaning 100 – qadamida sinov funksiyasining aniq yechimiga yuqori aniqlikda yaqinlashishini ko'rishimiz mumkin.

1-rasmda ψ funksiyaning $h=0.05$, $\tau=0.01$ ga teng bo'lgan holdagi qiymatlari iteratsiyaning 61-qadamidayoq deyarli aniq yechim bilan ustma-ust tushayotganini ko'rishimiz mumkin.

Xulosa o'rnida aytishimiz mumkinki, bir o'lchamli Nav-Stoks tenglamasini uyurma va tok funksiyasi tizimida sonli modellashtirish yuqori aniqlikdagi yechimlarni topish imkonini beradi.

References:

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980.-616 с.
2. О.С. Мажорова, Ю.П. Попов. О методах численного решения уравнений Навье-Стокса, //Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, том 20, №4, 1005-1020
3. А.А. Самарский, Ю.П. Попов. Разностные схемы газовой динамики. М., «Наука», 1975.
4. Нармурадов Ч.Б., Фуломқодиров К.А. Математическое моделирование уравнений Навье-Стокса в системе вихря и функции тока. //«Проблемы вычислительной и прикладной математики».-научный журнал №3(9) Ташкент 2017
5. Ch.Normurodov, K. Gulomkodiroy, E. Kholiyarov. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations in the "Vortex-Current" System. //International Journal Of Advanced Research in Science, Engineering And Technology, Volume 7, Issue 11, November 2020