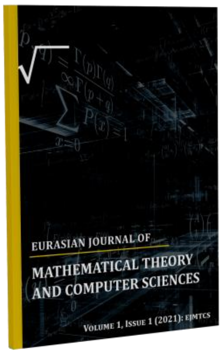
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ СО СВОЙСТВОМ BLOW-UP НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ВИДА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Матякубов А.С.
Раупов Д.Р.
Ибрагимова Д.А.
Национальный университет Узбекистана
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.8188322

ARTICLE INFO

Received: 18th July 2023
Accepted: 26th July 2023
Online: 27th July 2023

KEY WORDS

Кросс-диффузия, система, автомодельный, решение, недивергентный, blow-up.

ABSTRACT

Рассматривается нелинейная система уравнения параболического типа не дивергентного вида с неоднородной плотностью. Построена автомодельная система уравнений, найдено оценка решений со свойством blow-up, в зависимости от значения численных параметров.

В данном работе исследуются качественные blow-up свойства решений нелинейной системы параболического уравнения недивергентного вида с переменной плотностью [1, 2, 3]:

$$|x|^{-l}\frac{\partial u}{\partial t}=v^{\alpha_1}\nabla\left(|x|^n u^{m_1-1}\nabla u\right)+|x|^{-l}u^{\beta_1},$$

$$|x|^{-l}\frac{\partial v}{\partial t}=u^{\alpha_2}\nabla\left(|x|^n v^{m_2-1}\nabla v\right)+|x|^{-l}v^{\beta_2}, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\geq 0,\ \ v|_{t=0}=v_0(x)\geq 0,\ \ x\in R^N \qquad (2)$$

где, $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)$, $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, n, l$ – положительные числа, $N\geq 1$ – размер пространства, $u=u(t,x)\geq 0,\ v=v(t,x)\geq 0$ – температура среды в момент $t>0$ в точке $x\in R^N$; u^{β_1}, v^{β_2} – коэффициент, характеризующий объемное поглощение тепла, $\rho(x)=|x|^{-l}$ плотность окружающей среды.

Во многих задач в теории нелинейных уравнений особое место занимает исследование неограниченных решений, или по-другому, режимов с обострением (blow-up). Нелинейные задачи, допускающие неограниченные решения, являются глобально неразрешимыми по времени: решение неограниченно возрастает в течение конечного промежутка времени.

В работе [4] рассмотрено вырожденная параболическая система с нелинейным локализованным источником

$$u_t=u^{\alpha}\left(\Delta u+u^p(x,t)v^q(x_0,t)\right),\ v_t=v^{\beta}\left(\Delta v+v^m(x,t)u^n(x_0,t)\right),$$

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

доказано, что система имеет единственное положительное классическое решение, оценена скорость обострения и blow-up решения. Изучено установление blow-up решения и скорость обострения по отношению к радиальной переменной blow-up решения, когда область имеет вид шара.

В работе [5] изучаются нелинейные вырождающиеся параболические системы $u_t = v^{\gamma_1}\left(u_{xx} + au\right),\ v_t = u^{\gamma_2}\left(v_{xx} + bv\right)$ с граничными условиями Дирихле. Используется метод регуляризации и методика верхне-нижнего решения, чтобы показать локальное существование решения для нелинейной вырождающейся параболической системы. Обсуждается существование глобального решения, установлены blow-up свойства решения.

В работе [6] исследовано положительные решения вырожденных квазилинейных параболических систем недивергентной формы

$$u_{it} = f_i\left(u_{i+1}\right)\left(\Delta u_i + a_i u_i\right),\ x\in\Omega,\ t>0,\ i=1,2,\dots,n-1,$$

$$u_{nt} = f_n\left(u_1\right)\left(\Delta u_n + a_n u_n\right),\ x\in\Omega,\ t>0$$

с однородным граничным условием Дирихле и положительным начальным условием. Локальное существование и единственность классического решения доказаны. Показано, когда $\min\{a_1,\dots,a_n\}\le\lambda_1$ (где λ_1 является первым собственным значением $-\Delta$ в Ω с однородным граничным условием Дирихле), то существует глобальное положительное классическое решение, и все положительные классические решения не имеют свойство blow-up.

Используя теорему сравнения, не решая задачу, мы можем оценить решение сверху и снизу, что является весьма важным при исследовании blow-up свойств нелинейных задач.

Для построения автомодельной системы для (1) предлагается алгоритм нелинейного расщепления, для чего решение системы (1) ищется в виде

$$u\left(t,x\right) = (T-t)^{q_1}\,\mathrm{w}_1\left(\tau(t),\mathrm{r}\right),\ v\left(t,x\right) = (T-t)^{q_2}\,\mathrm{w}_2\left(\tau(t),\mathrm{r}\right),\ r=|x| \qquad (3)$$

$$q_1 = -\frac{1}{\beta_1-1},\ \mathrm{q}_2 = -\frac{1}{\beta_2-1}$$

$$\tau(t) = \begin{cases} \int (\mathrm{T}-\mathrm{t})^{\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}}dt, & \dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1\neq 0 \\ Ln(\mathrm{T}-\mathrm{t}), & \dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+1=0 \end{cases}$$

В дальнейшем система (1) исследуется при выполнении условия

$$\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}=\frac{m_2-1}{1-\beta_2}+\frac{\alpha_2}{1-\beta_1}$$

Тогда относительно $\left(w_1,w_2\right)$ получим систему уравнений

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} = w_2^{\alpha_1} r^{l-N+1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N+n-1} w_1^{m_1-1}\frac{\partial w_1}{\partial r}\right) + b_1\tau^{-1}\left(w_1^{\beta_1-1} - \frac{1}{\beta_1-1}w_1\right) = 0,$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial \tau} = w_1^{\alpha_2} r^{l-N+1}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{N+n-1} w_2^{m_1-1}\frac{\partial w_2}{\partial r}\right) + b_2\tau^{-1}\left(w_2^{\beta_1-1} - \frac{1}{\beta_1-1}w_2\right) = 0, \qquad (4)$$

где $b_i = -\dfrac{1}{q_i(\mathrm{m}_i-1)+q_{3-i}\alpha_i+1}, \quad i=1,2$

А затем введя (3) преобразование

$$w_1(\tau,x) = f_1(\xi), \quad w_2(\tau,x) = f_2(\xi), \quad \xi = \frac{|x|^{\frac{2-l-n}{2}}}{\tau^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{l+n}{2}\right)} \qquad (5)$$

получим автомодельную систему уравнений

$$f_2^{\alpha_1}\xi^{1-s}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1} f_1^{m_1-1}\frac{df_1}{d\xi}\right) + \frac{\xi}{2}\frac{df_1}{d\xi} + b_1\left(f_1^{\beta_1} - \frac{1}{\beta_1-1}f_1\right) = 0,$$

$$f_1^{\alpha_2}\xi^{1-s}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{s-1} f_2^{m_1-1}\frac{df_2}{d\xi}\right) + \frac{\xi}{2}\frac{df_2}{d\xi} + b_1\left(f_2^{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1-1}f_2\right) = 0, \qquad (6)$$

где $s = \dfrac{2(N-l)}{2-l-n}$

Теорема. Пусть $q_{3-i}\alpha_i + q_i(m_i-1)+1<0, \quad \beta_i<1, \quad s\ge 0$ (7)
$u_+(0,x)\ge u_0(x),\ v_+(0,x)\ge v_0(x),\ x\in R^N$. Тогда для решения задачи (1)-(2) справедлива следующая оценка

$$u(\mathrm{t},x)\le u_+(\mathrm{t},x), v(\mathrm{t},x)\le v_+(\mathrm{t},x),$$

где

$$u_+(t,x) = A_1(T-t)^{q_1}\left(a - \frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_1}, \quad v_+(t,x) = A_2(T-t)^{q_2}\left(a - \frac{|x|^{2-l-n}}{\tau\left(1-\frac{l+n}{2}\right)^2}\right)^{p_2}$$

$p_i, A_i, i=1,2$ – найденные константы.

Доказательство: Для доказательства теоремы выражаем $L(u_+(t,x))$ в виде суммы $L(u_+(t,x)) = L_1(u_+(t,x)) + L_2(u_+(t,x))$.

Здесь,

$$L_1(u_+(t,x)) = f_2^{\alpha_1}\frac{d}{d\xi}\left(f_1^{m-1}\frac{df_1}{d\xi}\right) + \frac{\xi}{2}\cdot\frac{df_1}{d\xi}(f_1)$$

$$L_2\left(u_+(t,x)\right)=\frac{s-1}{\xi}f_2^{\alpha_1}\frac{d}{d\xi}\left(f_1^{m_1-1}\frac{df_1}{d\xi}\right)+b_1\left(f_1^{\beta_1}-\frac{1}{\beta_1-1}f_1\right)$$

Действительно, мы покажем, что $L\left(f(\xi)\right)\le 0$ когда $|\xi|<a^{\frac{1}{2}}$. Для этого мы делаем следующий выбор: сначала мы рассчитаем, что это $L_1\left(u_+(t,x)\right)=0$ и тогда мы докажем, что выполняется $L_2\left(u_+(t,x)\right)\le 0$.

$$L_1\left(u_+(t,x)\right)=f_2^{\alpha_1}\frac{d}{d\xi}\left(f_1^{m-1}\frac{df_1}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2}\cdot\frac{df_1}{d\xi}\left(f_1\right)=0$$

$$f_1(\xi)=A_1\left(a-\xi^{\gamma}\right)^{p_1}$$

Для выполнения неравенств $L_2\left(u_+(t,x)\right)\le 0$ достаточно выполнения условий теоремы.

$$L_2\left(u_+(t,x)\right)=\frac{s-1}{\xi}f_2^{\alpha_1}\frac{d}{d\xi}\left(f_1^{m_1-1}\frac{df_1}{d\xi}\right)+b_1\left(f_1^{\beta_1}-\frac{1}{\beta_1-1}f_1\right) \tag{8}$$

Из условия $L_1\left(u_+(t,x)\right)=0$ мы могли бы переписать уравнение так, чтобы:

$$f_2^{\alpha_1}\frac{d}{d\xi}\left(f_1^{m-1}\frac{df_1}{d\xi}\right)=-\frac{\xi}{2}\cdot\frac{df_1}{d\xi}\left(f_1\right)$$

Мы ставим это равенство в $L_2\left(u_+(t,x)\right)$ и получаем следующий результат

$$L_2(u_+(t,x))=f_1\left(-A_1^{m_1-1}A_2^{\alpha_1}\cdot s-\frac{b_1}{\beta_1-1}\right)+b_1f_1^{\beta_1}$$

Если неравенство $q_{3-i}\alpha_i+q_i\left(m_i-1\right)+1<0$ и если выполняется одно из неравенств (7), то будет уместно следующее неравенство

$$f_1\left(-A_1^{m_1-1}A_2^{\alpha_1}\cdot s-\frac{b_1}{\beta_1-1}\right)+b_1f_1^{\beta_1}\le 0$$

Тогда по теореме сравнений решений для задачи (1)-(2) существует решение в Q и для него справедливы оценки $u(t,x)\le u_+(t,x)$ и $v(t,x)\le v_+(t,x)$.

$$p_i=\frac{1+\alpha_i-m_{3-i}}{\alpha_i\alpha_{3-i}-(m_{3-i}-1)(m_i-1)}\qquad A_i=\left(\frac{p_{3-i}}{p_i^{\frac{m_{3-i}-1}{\alpha_i}}}\right)^{-\frac{\alpha_i}{\alpha_1\alpha_2-(m_i-1)(m_{3-i}-1)}},\ i=1,2$$

Теорема доказана.

References:

1. Арипов М., Матякубов А.С. К асимптотическому поведению решений нелинейных параболических систем недивергентного вида // «Вычислительные технологии», 2015, том 20, часть II, С. 275-282.
2. Matyakubov A.S. Finite speed of the perturbation distribution and asymptotic behavior of the solutions of a parabolic system not in divergence form // Universal Journal of Computational Mathematics, 5(3), 2017, P. 57–67.
3. Matyakubov A.S., Raupov D.R. Explicit estimate for blow-up solutions of nonlinear parabolic systems of non divergence form with variable density// AIP Conference Proceedings, 2023, Volume 2781, Issue 1, 020055 (2023).
4. Wang M., Wei Y. Blow-up properties for a degenerate parabolic system with nonlinear localized sources. J. Math. Anal. Appl.. 2008. 343. P. 621–635.
5. Duan Z., Zhou L. Global and Blow-Up Solutions for Nonlinear Degenerate Parabolic Systems with Crosswise-Diffusion. Journal of Mathematical Analysis and Applications 244, 2000. P.263-278.
6. Lu H. Global existence and blow-up analysis for some degenerate and quasilinear parabolic systems. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2009. 49. P.1–14.