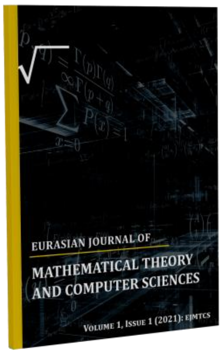
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



ФОРМУЛА ПРОДОЛЖЕНИЯ ОБОБЩЕННО ГОЛОМОРФНОГО ВЕКТОРА

Ermamatova Fotima E.
Samarkand State University, Uzbekistan, Samarkand
fotimaermamatova2020@gmail.com
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.10418229

ARTICLE INFO

Received: 14th December 2023
Accepted: 20th December 2023
Online: 21th December 2023

KEY WORDS

Обобщенная система Коши-Римана, задача Коши, некорректные задачи, регулярное решение, приближенное решение, матрица Карлемана.

ABSTRACT

Рассматривается задача аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши-Римана в трехмерной пространственной области по ее значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши. Строится приближенное решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

Введение

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений, которая является обобщением системы Коши-Римана [1], [2] в пространственной области по ее значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши. Как известно, система Коши-Римана, важность которых в физических приложениях привела к далеко идущим обобщениям [3-5].

Обобщенная система Коши-Римана эллиптическая, задача Коши для эллиптических уравнений неустойчива относительно малого изменения данных, т.е. некорректна (пример Адамара [6]). В некорректных задачах теорема существования не доказывается, существование предполагается заданным априори. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному, ([7], с.4). Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена ([8], с.58).

После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризирующих операторов. В 1926 г. Т.Карлеман ([7], с. 41) построил формулу, которая связывает значения аналитической функции комплексного переменного в точках области с ее значениями на куске границы этой области. На основе этой формулы ([7], с. 34) введено понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и в некоторых случаях указан способ ее построения. Конструкция функции Карлемана дает возможность в этих задачах построить регуляризацию и получить оценку условной устойчивости.

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х годах XX века в работах [7], [9]-[11] и развивалось впоследствии в [12]- [18].

§ 1. Постановка задачи и конструкция матрицы Карлемана

Пусть R^3 –вещественное трехмерное евклидово пространство,

$$x=(x_1,x_2,x_3),\quad y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3,\quad x'=(x_1,\ x_2),\quad y'=(y_1,y_2)\in R^2,$$

$$\alpha^2=|y'-x'|=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2,\quad r^2=|y-x|^2=\alpha^2+(y_3-x_3)^2,\quad s=\alpha^2,\quad \Omega -$$

ограниченная односвязная область в R^3 с границей ∂D состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3=0$ и гладкого куска поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3\geq 0$, $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, $\partial\Omega=S\cup T$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}+(a_1F_1+a_2F_2+a_3F_3)=0,\quad \frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}+a_3F_2-a_2F_3=0,$$

(1)

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}+a_1F_2-a_3F_1=0,\quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+a_2F_1-a_1F_2=0,$$

где $F(x)=(F_1(x),F_2(x),\ F_3(x))$ искомая вектор-функция, $A=(a_1,a_2,a_3)$ - заданный постоянный вектор.

Определение 1. Трехкомпонентный вектор $F(x)=(F_1(x),F_2(x),\ F_3(x))$ называется обобщенным потенцальным вектором в Ω, если скалярные функции $F_k(x)$ ($k=1,2,3$) дифференцируемы в Ω, непрерывны на $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$ и удовлетворяют внутри Ω эллиптической системы (1) имеющий в векторном виде

$$divF+(A\cdot F)=0,\quad rotF+[FxA]=0. \qquad (2)$$

Если вектор $F(x)$ представить в виде $F(x)=grad\varphi(x)-AF(x)$, где $\varphi(x)$ - решение уравнения $\Delta\varphi(x)-|A|^2\varphi(x)=0$, то он будет решением системы (2).

В том случае, когда $F_3=a_3=0$ и F не зависит от x_3, система (1) будет обобщенной системой Коши-Римана, теория которой разработана И.Н.Векуа [20], а формула продолжения решения по ее значениям на куске границы получена Т.И.Ишанкуловым [21]. Если $A=0$, то $F(x)$ будет потенциальным вектором. В последнем случае система (1) (ряд аналитических фактов) изучена Р.Мизесом [22] и А.В.Бицадзе [23].

Постановка задачи. Известны данные Коши решения системы (1) на поверхности S:

$$F(y)\big|_S = f(y), \quad y \in S \tag{3}$$

где S - часть границы области Ω, $f(y) = (f_1(y),\ f_2(y),\ f_3(y))$ - заданная непрерывная вектор-функция.

Требуется восстановить функцию $F(x)$ в Ω, исходя из заданной $f(y)$, т. е. решить задачу аналитического продолжения решения обобщенной системы Коши-Римана в пространственной области по ее значениям на гладком куске S границы.

Известно, что обобщенная система Коши-Римана эллиптична и решение задачи Коши для эллиптических уравнений единственно [6]. Однако она некорректно т.е. 1) решение существует не для любых данных; 2) решение не зависит непрерывно от данных Коши. Следующий подобный пример Адамара [6] показывает, что задача Коши для системы (1) некорректна.

Пример 1. Пусть T есть кусок плоскость $x_3 = 0$ в R^3 и

$$F_1(x) = \frac{\cos(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2} - a_1\frac{\sin(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^3},$$

$$F_2(x) = \frac{\sin(kx_1)\cos(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2} - a_2\frac{\sin(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^3}, \tag{4}$$

$$F_3(x) = \frac{\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)\sin(kx_1)\sin(kx_2)ch\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^3} - a_3\frac{\sin(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^3}.$$

Покажем, что вектор-функция $F(x) = (F_1(x),\ F_2(x),\ F_3(x))$ удовлетворяет системе (1) в области Ω. Имеем

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} = -\frac{\sin(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k} - a_1\frac{\cos(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2},$$

$$\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} = -\frac{\sin(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k} - a_2\frac{\sin(kx_1)\cos(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial F_3(x)}{\partial x_3} = \frac{\left(2k^2+|A|\right)\sin(kx_1)\sin(kx_2)\,sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2} -$$

$$- a_3\frac{\left(\sqrt{2k^2+|A|}\right)\sin(kx_1)\sin(kx_2)ch\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^3}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} + (a_1F_1 + a_2F_2 + a_3F_3) = 0.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_2}=-\frac{\cos(kx_1)\cos(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k}-a_1\frac{\sin(kx_1)\cos(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2},$$

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_3}=\frac{\left(\sqrt{2k^2+|A|}\right)\cos(kx_1)\sin(kx_2)\,ch\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2}-$$
$$-a_3\frac{\left(\sqrt{2k^2+|A|}\right)\sin(kx_1)\sin(kx_2)ch\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^3},$$

$$\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_1}=-\frac{\cos(kx_1)\cos(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k}-a_2\frac{\cos(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2},$$

$$\frac{\partial F_2(x)}{\partial x_3}=\frac{\left(\sqrt{2k^2+|A|}\right)\sin(kx_1)\cos(kx_2)\,ch\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2}- \qquad (6)$$
$$-a_3\frac{\left(\sqrt{2k^2+|A|}\right)\sin(kx_1)\sin(kx_2)ch\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^3},$$

$$\frac{\partial F_3(x)}{\partial x_1}=-\frac{\left(\sqrt{2k^2+|A|}\right)\cos(kx_1)\sin(kx_2)ch\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2}-a_1\frac{\cos(kx_1)\sin(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2},$$

$$\frac{\partial F_3(x)}{\partial x_2}=-\frac{\left(\sqrt{2k^2+|A|}\right)\sin(kx_1)\cos(kx_2)ch\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2}-a_1\frac{\sin(kx_1)\cos(kx_2)sh\left(\sqrt{2k^2+|A|}x_3\right)}{k^2}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_2}-\frac{\partial F_2}{\partial x_3}+a_3F_2-a_2F_3=0,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_3}-\frac{\partial F_3}{\partial x_1}+a_1F_2-a_3F_1=0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}-\frac{\partial F_1}{\partial x_2}+a_2F_1-a_1F_2=0.$$

Таким образом, вектор-функция $F(x)$ всюду в области Ω удовлетворяют уравнениям (1).

Из (4) следует

$$F(x)\big|_T=F(x)\Big|_{x_3=0}=\left(0,\ 0,\ \frac{2\sqrt{k^2+|A|}\ \sin(kx_1)\sin(kx_2)}{k^3}\right)\to(0,0,0),\quad k\to\infty.$$

Однако при $x\in\Omega$ и $k\to\infty$ решение становится сколь угодно большой $F(x)\to\infty$.

Таким образом, мы показали, что решения задачи Коши (1), (3) неустойчива по отношению малым изменениям данных.

Основной цель получение явная формула продолжения, которая является аналогом классической формулы Б.Римана, В.Вольтера и Ж.Адамара, построенной ими для решения задачи Коши в теории гиперболических уравнений.

Метод получения указанных результатов основан на построении в явном виде матрицы фундаментального решения обобщенной системы Коши-Римана, зависящего от положительного параметра, исчезающего при стремлении параметра к бесконечности на T, когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_3 > 0$. Следуя М.М.Лаврентьеву и Ш.Ярмухамедову матрицу фундаментальных решений с указанным свойством назовем матрицей Карлемана для полупространства [7], [19]. После построения матрицы Карлемана в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши выписываются в виде обобщенной пространственной интегральной формулы Коши.

Следуя [7], приведем

Определение 2. Матрицей Карлемана задачи (1), (3) называется 3×3 матрица $M_\sigma(y, x; A)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $M_\sigma(y,x;\ A) = M_0(r;\ A) + G_\sigma(y,x;\ A)$, где σ - положительный числовой параметр, матрица $G_\sigma(y,\ x;\ A)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области Ω, $M_0(r;\ A)$ - матрица фундаментальных решений системы (1);

2) $\int_T |M_\sigma(y,x;\ A)| dS_y \le \varepsilon(\sigma)$ при фиксированном $x\in\Omega$, где $\varepsilon(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to\infty$;

здесь и далее $|M_\sigma|$ означает евклидову норму матрицы $M = \|M_{ij}\|$, т.е. $|M_\sigma| = (\sum_{i,j=1}^{3} M_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$, в частности $|F| = (\sum_{i=1}^{3} F_i^2)^{\frac{1}{2}}$ для вектора F.

Определение 3. Вектор функция $F(x)$ называется регулярным решением системы (1), если она из класса $C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяют в области Ω системе (1).

Обозначим через $A(\Omega)$-совокупность регулярных решений системе (1).

С целью построения приближенного решения задачи (1), (3) матрицу $M_\sigma(x, y; H)$ определим из [1]

$$M_\sigma(x,\ y;\ H) = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 & -\alpha u_2 + \beta u_1 & \alpha u_3 + \gamma u_1 \\ \alpha v_1 + \beta v_2 & -\alpha v_2 + \beta v_1 + \gamma v_4 & -\beta v_4 + \gamma v_1 \\ \alpha w_1 + \gamma w_3 & \beta w_1 + \gamma w_4 & -\alpha w_3 - \beta w_4 + \gamma w_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

где $u_1 = (\frac{\partial}{\partial y_1} + a)\Phi_\sigma$, $v_1 = (\frac{\partial}{\partial y_2} + b)\Phi_\sigma$, $w_1 = (\frac{\partial}{\partial y_3} + c)\Phi_\sigma$,

$u_2=(\frac{\partial}{\partial y_2}-b)\Phi_\sigma$, $v_2=(-\frac{\partial}{\partial y_1}+a)\Phi_\sigma$, $w_2=0$,

$u_3=(\frac{\partial}{\partial y_3}-c)\Phi_\sigma$, $v_3=0$, $w_3=(-\frac{\partial}{\partial y_1}+a)\Phi_\sigma$,

$u_4=0$, $v_4=(\frac{\partial}{\partial y_3}-c)\Phi_\sigma$, $w_4=(-\frac{\partial}{\partial y_2}+b)\Phi_\sigma$,

в котором функция $\Phi_\sigma(y,x;\,k)$ при $\sigma\geq 0$ определяется из (1.15).

Из результатов работы [7] вытекает

Лемма 1. Функция $\Phi_\sigma(y,x;\,k)$, определенная формулой

$$2\pi^2\Phi_\sigma(y-x;\,k)=e^{-\sigma a^2-\sigma\alpha^2+\sigma(y_3-x_3+a)^2}\int_0^\infty\varphi_\sigma(y-x,u)\frac{\cos(ku)du}{u^2+r^2}, \qquad (8)$$

где $\varphi_\sigma(y-x,\,u)=\cos\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}-(y_3-x_3)\frac{\sin\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}$, $\tau=2\sigma(y_3-x_3+a)$

представима в виде

$$\Phi_\sigma(y,x;\,k)=\Phi_0(r;\,k)+g_\sigma(y,x;\,k) \qquad (9)$$

где $g_\sigma(y,x;\,k)$ – некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\Delta(\frac{\partial}{\partial y})g-k^2g=0,\quad y\in\Omega,$$

$$\int_T\left(|\Phi_\sigma|+\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}\right|\right)dS_y\leq C(k,\Omega)\sigma\exp(-\sigma x_3),$$

где $C(k,\,\Omega)$ - постоянная.

Исходя из этой леммы 1 докажем следующую лемму.

Лемма 2. Матрица $M_\sigma(y,x;\,A)$, определенная формулой (7), является матрицей Карлемана задачи (1), (3), т.е. представима в виде

$$M_\sigma(y,x;\,A)=M_0(r;\,A)+G_\sigma(y,x;\,A), \qquad (10)$$

где $G_\sigma(y,x;\,A)=\|G_{ij\sigma}(y,x;\,A)\|_{3x3}$ - матрица, определенная для всех значений y, x и по переменной y удовлетворяющая системе (1) во всем R^3.

Для того, чтобы сформулировать удобный и простой критерий разрешимости задачи Коши. С этой целью в (8) функцию $e^{\sigma w^2}$, $w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3$, заменим функцией $e^{\sigma w_1^2}$, где $w_1=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3-x_3+a$, $a=\max_D y_3$ при этом $w_1^2=-u^2-\alpha^2+2i(y_3-x_3+a)\sqrt{u^2+\alpha^2}+(y_3-x_3+a)^2$. Вновь определенную функцию $\Phi_\sigma(x,y;\,k)$, которая теперь зависит от разности $y-x$ обозначим через $\Phi_\sigma(y-x;k)$. Из леммы 1 заключаем, что функция $\Phi_\sigma(y-x,\,k)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца для всех x, y, $y \neq x$ и для нее справедливо представление (1) в котором $g_\sigma(x,\ y;k) = g_\sigma(y-x;k)$. Формулы (8) для $\Phi_\sigma(y-x;\,k)$ имеют вид:

$$2\pi^2\Phi_\sigma(y-x;\,k) = e^{-\sigma a^2-\sigma\alpha^2+\sigma(y_3-x_3+a)^2}\int_0^\infty \varphi_\sigma(y-x,u)\frac{\cos(ku)du}{u^2+r^2}, \qquad (11)$$

где $\varphi_\sigma(y-x,\,u) = \cos\tau\sqrt{u^2+\alpha^2} - (y_3-x_3)\frac{\sin\tau\sqrt{u^2+\alpha^2}}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}$, $\tau = 2\sigma(y_3-x_3+a)$

Ясно, что для вектор-функции $q(y)$ класса $A(D)\cap C(\overline{D})$ справедлива обобщенная интегральная формула Коши

$$\vec{F}(x) = \int_{\partial\Omega} M_\sigma(y,x;\ A)\vec{F}(y)dS_y, \quad x\in\Omega. \qquad (12)$$

где в качестве $\Phi_\sigma(x,y;\,k)$ присутствует функция $\Phi_\sigma(y-x,\,k)$, определенная формулой (11).

Пусть $|y-x| = r \geq \delta_0 > 0$, где

$$0 \leq y_3 \leq a \text{ и } 0 < x_3 < 2a. \qquad (13)$$

Тогда при $\sigma \geq 1$ выводим очевидное неравенство

$$|\Phi_\sigma(y-x;k)| + |grad\Phi_\sigma(y-x;k)| = C_{\delta_0}\sigma e^{\sigma(y_3-x_3+a)^2-\sigma a^2-\sigma\alpha^2}, \qquad (14)$$

где постоянная C_{δ_0} не зависит от $\sigma,\ x,\ y$. Теперь из (3.3) и равенства

$$(y_3-x_3+a)^2 - a^2 = (y_3-x_3)(y_3-x_3+2a) \qquad (15)$$

заключаем, что $\Phi_\sigma(y-x;k)$ и ее градиент стремятся к нулю для всех $x\in R^3$ с условием (12), когда $y_3=0$ и $\sigma\to\infty$, т.е. $M_\sigma(y-x;\ H)$ является матрицей Карлемана, когда полюс лежит в слое (12).

Пусть $\vec{F}(y)\in A(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ и $q(y) = f(y)$, где $f(y)$ - заданная функция класса $C(S)$ соответственно. Определим функцию $q_\sigma(x)$ равенством

$$\vec{F}_\sigma(x) = \int_S M_\sigma(y-x;A)\vec{f}(y)dS_y. \qquad (16)$$

Из формулы Коши (12) заключаем, что для любого $x\in\Omega$ справедливо предельное равенство

$$\vec{F}(x) = \lim_{\sigma\to\infty}\vec{F}_\sigma(x), \qquad (17)$$

которое согласно формуле Ньютона-Лейбница можно записать в эквивалентном виде

$$\vec{F}(x)=\int_0^\infty \frac{d\vec{F}_\sigma}{d\sigma}(x)d\sigma+\vec{F}_1(x), \qquad (18)$$

$$\vec{F}_1(x)=\int_S M_1(y-x;H)\vec{f}(y)\,dS_y, \quad \Phi_1=\Phi_\sigma\big|_{\sigma=1} \qquad (19)$$

Обозначим

$$I(\sigma,\,x)\equiv\frac{dq_\sigma}{d\sigma}(x)=\int_S N_\sigma(y-x;H)\,f(y)dS_y, \qquad (20)$$

здесь

$$N_\sigma(y-x;H)=\frac{dM_\sigma}{d\sigma}(y-x;H)$$

$$\psi_\sigma(x-y;k)\equiv\frac{d\Phi_\sigma}{d\sigma}(y-x;k)=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left[e^{\sigma w_1^2-\sigma a^2}(w_1+a)\right]\frac{\cos(ku)\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \ \sigma>0, \qquad (21)$$

$$w_1=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3-x_3+a.$$

Функция $\psi_\sigma(x-y;k)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца при $x,y\in R^3$, включая точку $y=x$ (следствие 1), поэтому вектор-функция $I(\sigma,\,x)$ также удовлетворяет системе (1.1) в R^3 при $\sigma>0$. В этих обозначениях формула (3.7) для $x\in\Omega$ принимает вид

$$\vec{F}(x)=\int_1^\infty I(\sigma,x)d\sigma+\vec{F}_1(x)\ \ q(x)=\int_1^\infty I(\sigma,x)d\sigma+q_1(x), \qquad (22)$$

которую, используя представление (1.10), где

$$\Phi_\sigma(x,y;k)=\Phi_\sigma(y-x;k)=\Phi_0(r;\,k)+g_\sigma(y-x;k),\ x\in\Omega,\ \sigma=1,$$

можно записать в виде

$$q(x)=\int_1^\infty I(\sigma,\,x)d\sigma+E(x)+\int_S M_0(r;H)\,f(y)\,dS_y, \qquad (23)$$

здесь обобщенно потенциальный вектор $E(x)$ в R^3 определяется формулой

$$E(x)=\int_S G_1(y-x;H)\,f(y)dS_y.$$

Из (23) видим, что решение задачи Коши представляется в виде суммы обобщенно потенциального вектора и потенциала простого слоя.

Теорема 1. Пусть $S\subset C^2$, $\vec{f}(y)\in C(S_0)\bigcap L(S)$, где S_0-множество внутренних точек S (S - без края). Тогда для существования функции $q(y)\in A(D)\bigcap C(D\cup S_0)$, такой, что

$$\vec{F}(y)=\vec{f}(y),\ \ y\in S_0 \qquad (24)$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in R^3$ с условием $0 < x_3 < 2a$, сходился (равномерно при $\delta < x_3 \le 2a - \delta,\ 0 < \delta < a$) несобственный интеграл

$$\left| \int_1^{\infty} I(\sigma,\, x) d\sigma \right| < \infty \, , \qquad (25)$$

где $I(\sigma,\, x)$ определяется формулой (3.9).

Если условие (25) выполнено, то аналитическое продолжение осуществляется эквивалентными формулами (23) и (17).

References:

1. Оболашвили Е.И. Пространственный аналог обобщенных аналитических функций // Сообщения АН ГССР, 73, №1, 1974.
2. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка . М.: Наука, 1966. С.204.
3. Brackx F., Delanghe K., Sommen F. Clifford analysis. L.: Pitman, 1982. V.76. 308 pp.
4. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ // Теоретическая и математическая физика. 1984.Т. 59. №1. С.3-27.
5. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теоретическая и математическая физика. 1984.Т. 60. №2. С.169-198.
6. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М.: Наука, 1978. – С. 38-70.
7. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. –92 с.
8. Берс А., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. –М.: Мир, 1966. – 351 с.
9. Лаврентьев М.М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка // ДАН СССР. – 1957. –Т.112. №2.– С. 195-197.
10. Мергелян С.Н. Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа // УМН. – 1956. – Т. 11. – Вып. 5. – С. 3-26.
11. Иванов В.К. Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т.1. - №1. – С. 131-136.
12. Ярмухамедов Ш.Я. О задаче Коши для уравнения Лапласа //ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. - №2. – С. 281-283.
13. Ярмухамедов Ш. О продолжении решения уравнения Гельмгольца // ДРАН - 1997, с. 320-323.
14. Ярмухамедов Ш. Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв. АН УзССР. – 1980. - №6. - серия физико – математических наук, С. 34 – 40.
15. Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. Абстрактная формула Карлемана // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. - №6. – С. 1292-1296.

16. Махмудов О.И. Задача Коши для системы уравнений теории упругости и термоупругости в пространстве // Изв. вузов. Математика. – 2004. - №2(501). – С. 43-53.
17. Сатторов Э.Н., Мардонов Дж.А.Задача Коши для системы уравнений Максвелла // Сиб. мат. журн. - 2003. – Т. 44. - №4. – С. 851-861.
18. Сатторов Э. Н. Задача Коши для обобщенной системы Моисил-Теодореско // Труд. межд. конф. «Современные проблемы математической физики информационных технологий» Тошкент, -2005. – Т.2. с. 84-87.
19. Тарханов Н.Н. О матрице Карлемана для эллиптических систем // ДАН СССР. – 1985. – Т. 284. - №2. – С. 294-297.
20. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1988. – 509 с.
21. Ишанкулов Т.И. О возможности обобщенно-аналитического продолжения в область функций, заданных на куске ее границы // Сибирск. матем. журн. – 2000. т.41, - №6. С. – 1350-1356.
22. Mises R. Integral theorems in three-dimentional potential flow.// Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50, 1944. – с.509-611.
23. Бицадзе А.В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения Изв. АН СССР. – сер. матем. – т. 17. – 1953. – с. 525-538.4.