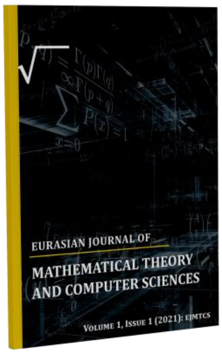
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЫ КОШИ-РИМАНА С КВАТЕРНИОННЫМ ПАРАМЕТРОМ

Сатторов Э.Н.
Заведующий кафедры Математика и информатика, Узбекско-Финский педагогический институт, Самарканд, Узбекистан
e-Sattorov@rambler.ru
Рустамов С.У.
Базовый докторант кафедры Математика, Навоинский государственный педагогический институт, Навои, Узбекистан
e-Sohibjon_17@mail.ru
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.10422247

ARTICLE INFO

Received: 14th December 2023
Accepted: 21th December 2023
Online: 22th December 2023

KEY WORDS

Обобщенная система Коши-Римана, задача Коши, некорректная задача, формула Карлемана.

ABSTRACT

В данной работе получено формула Карлемана для решений обобщенной системы Коши-Римана с кватернионным параметром в ограниченной трехмерной области.

Введение

В связи с применением аппарата теории функций комплексного переменного был достигнут наиболее существенный прогресс в решении двумерных задач математической физики. Среди возможных пространственных обобщений двумерной теории все более видное место в последнее время занимает кватернионный анализ.

Введенный в работах Gr.C.Moisil, N.Theodoresco [1], Н.М. Крылова [2] в связи с требованием факторизации оператора Лапласа аналог условий Коши-Римана естественным образом привел к понятиям кватернионных аналогов интеграла типа Коши, оператора сингулярного интегрирования T- оператора, рассмотренным впервые в работе А.В.Бицадзе [3], [4]. Для них оказались справедливы теоремы, обобщающие известные результаты теории функций комплексного переменного. В [3] были показаны и первые применения интегральных теорем кватернионного анализа в пространственной теории упругости.

Задача аналитического продолжения решения системы уравнений, которая является обобщением [1], [5]-[6] системой Моисила-Теодореску, трехмерным аналогом уравнений Коши-Римана, важность которых в физических приложениях привела к далеко идущем обобщениям [7]-[9].

Метод указанных результатов основан на конструкции в виде фундаментального решения оператора D_α, зависящего от положительного параметра, исчезающего при стремлении параметра к бесконечности на T, когда полюс фундаментального решения лежит в полупространстве $y_3 > 0$. Следуя М.М.Лаврентьеву и Ш.Ярмухамедову матрицу фундаментальных решений с указанным свойством назовем матрицей Карлемана для полупространства [10], [11]. После построения матрицы Карлемана в явном виде формула продолжения, а также регуляризация решения задачи Коши выписываются в виде обобщенной пространственной интегральной формулы Коши.

§1. Постановка задачи и конструкция функции Карлемана

Пусть R^3-вещественное трехмерное евклидово пространство,

$x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$, $x'=(x_1,x_2,0)$, $y'=(y_1,y_2,0)\in R^2$, $s=(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2$, $r^2=|y-x|=s+(y_3-x_3)^2$, Ω- ограниченная односвязная область в R^3 с границей $\partial\Omega$ состоящей из компактной связной части T плоскости $y_3=0$ и гладкого куска поверхности S Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3\geq 0$, $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$, $\partial\Omega=S\cup\mathrm{T}$.

Рассмотрим систему уравнений [12]

$$\alpha_0 f_0-divf-<f,\vec{\alpha}>=0,\quad grad\, f_0+rotf+[f\times\vec{\alpha}]+f_0\vec{\alpha}+\alpha_0 f=0 \qquad (1)$$

где $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\alpha_k\in C$, $k=0,1,2,3$; $f=(f_1,f_2,f_3)$, f_0- векторная и скалярная функции соответственно.

Пусть Q-множество комплексных кватернионов, т.е. если $\alpha\in Q$, то $\alpha=\sum_{k=0}^{3}\alpha_k i_k$, где i_k, $k=0,1,2,3$ - базисные кватернионные векторы, $\alpha_k\in C$, $k=0,1,2,3$. По определению, для i- мнимой единицы из C - выполняются соотношения $i i_k=i_k i$, $k=0,1,2,3$. Обозначим $\hat{\alpha}:=\sum_{k=1}^{3}\alpha_k i_k$, $\bar{\alpha}:=\alpha_0-\hat{\alpha}$, через $\Re$ подмножество Q делителей нуля. Через Θ обозначим подмножество Q делителей нуля.

На кватернионнозначных функциях вида $F(x)=\sum_{k=0}^{3}f_k(x)i_k$, $x\in\Omega\subset R^3$, $k=0,1,2,3$ определим оператор $D_\alpha F:=(D+M^\alpha)F$, где $D:=\sum_{k=1}^{3}i_k\frac{\partial}{\partial x_k}$ - оператор, обобщающий двумерный оператор Коши-Римана (см. например [6]); $M^\alpha F:=F\alpha$. Тогда уравнение $D_\alpha F=0$ является эквивалентной записью системы (1). Обозначим через $A(\Omega)$ совокупность функций, решений оператора D_α в Ω и непрерывных на $\overline{\Omega}=\Omega\bigcup\partial\Omega$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение $F(y)$ системы (1) в области Ω, исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности S:

$$F(y)|_S=g(y),\quad y\in S \qquad (2)$$

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

где $g(y)=\sum_{k=0}^{3} g_k(y) i_k$ - заданная непрерывная кватернионнозначная функция.

Когда $\alpha := (\alpha_0, \vec{\alpha}) = 0$ система (1) является хорошо известной [1] системой Моисила-Теодореску, для которой в [13], [14] получена формула аналитического продолжения голоморфного вектора по ее значениям на куске границы и аналог теоремы Фока-Куни. При $\alpha_0 = 0$, $\alpha_k \in R$, $k = 1, 2, 3$ задача аналитического продолжения обобщенно голоморфного вектора изучена в работе [15]–[16] и для однородной системы уравнений Максвелла изучена в работе [17]–[18]. В этой работе приводим аналогичную формулу для оператора D_α.

Когда $\alpha \in C$, т.е. $\alpha \equiv \alpha_0$, фундаментальное решение G_α оператора D_α может быть найдено по формуле (ср. [6] с. 76)

$$G_\alpha(x) = -[D_{-\alpha} h_\alpha](x) = h_\alpha(\alpha - x|x|^{-2} + i\alpha x|x|^{-1}), \tag{3}$$

где $h_\alpha(x) := -(4\pi|x|)^{-1} e^{-i\alpha|x|}$ - фундаментальное решение оператора Гельмгольца $\Delta + \alpha^2 I$ (см. например, [19]).

Обозначим $P^+F := (2\gamma)^{-1} F(\gamma + \hat{\alpha})$, $P^-F := (2\gamma)^{-1} F(\gamma - \hat{\alpha})$.

Тогда справедливо следующее непосредственно проверяемое равенство:

$$D_\alpha F = D_\xi P^+ F + D_\varsigma P^- F \tag{4}$$

где $\xi = \alpha_0 + \gamma$, $\varsigma = \alpha_0 - \gamma$, $\gamma \in C$, $\gamma^2 = \hat{\alpha}^2$.

Заметим, что операторы P^+ и P^- являются взаимно дополнительными проекторами, коммитирующими с операторами D_ξ и D_ς.

Определение 1. Функция

$$G_\alpha := \begin{cases} P^+ G_\xi + P^- G_\varsigma; & \alpha \notin \Re \ и \ \hat{\alpha}^2 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + \dfrac{\partial}{\partial \alpha_0}[G_{\alpha_0}]\hat{\alpha}, & \alpha \notin \Re \ и \ \hat{\alpha} = 0, \\ P^+ G_{2\alpha_0} + P^- G_0, & \alpha \in \Re \ и \ \alpha_0 \neq 0, \\ G_{\alpha_0} + h_0 \alpha, & \alpha \in \Re \ и \ \alpha_0 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

является фундаментальным решением оператора D_α.

Следуя [11], приведем

Определение 2. Функцией Карлемана задачи (1), (2) называется функция K_α^σ, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $K_\alpha^\sigma(x,y) = G_\alpha(x,y) + N_\alpha^\sigma(x,y)$,

где σ - положительный числовой параметр, функция $N_\alpha^\sigma(x,y)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области Ω, $G_\alpha(x,y)$ - функция фундаментальных решений оператора D_α;

2) $\int_T |K_\alpha^\sigma| dS_y \le \varepsilon(\sigma)$ при фиксированном $x \in \Omega$, где $\varepsilon(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$; здесь и далее $|K_\alpha^\sigma|$ означает евклидову норму.

Поскольку функция Карлемана отличается от функции фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то интегральная формула Коши остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на функции Карлемана.

§2. Формула Карлемана

С целью построения приближенного решения задачи (1), (2) рассмотрим четыре случая:

1) $\alpha \notin \Re$ и $\hat{\alpha}^2 \neq 0$

$$K_\alpha := P^+ K_\xi + P^- K_\varsigma = -\frac{(\gamma + \hat{\alpha})}{2\gamma}\left[D_{-\xi}\Phi_\xi\right](x) - \frac{(\gamma - \hat{\alpha})}{2\gamma}\left[D_{-\varsigma}\Phi_\varsigma\right](x) \qquad (6)$$

$$\Phi_\xi(x) = -\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(i\sqrt{u^2+s}+y_3)}{i\sqrt{u^2+s}+y_3-x_3}\right]\frac{ch(\gamma+\hat{\alpha})u}{\sqrt{u^2+s}}\,du, \qquad (7)$$

$$D_{-\xi}\Phi_\xi(x) = (D\Phi_\xi + \Phi_\xi\cdot\xi) = \sum_{k=1}^{3} i_k \frac{\partial \Phi_\xi}{\partial x_k} + \Phi_\xi\cdot\xi, \qquad (8)$$

$K(w)$-целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w, $w = u + iv$, где u, v -действительные числа, и $K(0) \neq 0$, для всех $R > 0$ существует $C_R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w| < R,\ \operatorname{Im} w \le -C_R} \left(|K(w)| + |\operatorname{Im} w||K'(w)| + |\operatorname{Im} w|^2\,|K''(w)|\right) < \infty. \qquad (9)$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ имеем $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Тогда из (9) следует, что для всех $R > 0$

$$\sup_{|\operatorname{Re} w| < R} \left\{|K(w)| + (1+|\operatorname{Im} w|)|K'(w)| + (1+|\operatorname{Im} w|^2)|K''(w)|\right\} < \infty. \qquad (10)$$

Формула (7) имеет вид

$$-2\pi^2 K(0)\Phi(x,y;k) = \int_0^\infty \left\{\frac{(y_3-x_3)\operatorname{Im} K(w)}{\sqrt{s+u^2}} - \operatorname{Re} K(w)\right\}\frac{ch(ku)}{r^2+u^2}\,du. \qquad (11)$$

Если $K(w) \equiv 1$, то функция $\Phi(x,y;k)$ является классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца, то есть

$$\Phi(x,y;k)\equiv\Phi_0(r;k)=\frac{1}{4\pi r}e^{-ikr}.$$

при этом

$$\frac{e^{-ikr}}{4\pi r}=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{ch(ku)}{r^2+u^2}du.$$

2) $\alpha\notin\Re$ и $\hat{\alpha}^2=0$. Проверим, что $K_\alpha:=K_{\alpha_0}+\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[K_{\alpha_0}\right]\hat{\alpha}$ есть фундаментальное решение оператора D_α.

$$(K_\alpha F)(x):=-\int_\Gamma K_{\alpha_0}(x-t)n(t)F(t)d\Gamma_t-\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[K_{\alpha_0}\right]\hat{\alpha}\,n(t)F(t)d\Gamma_t=$$

$$=\int_\Gamma\left[D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}\right](x-t)n(t)F(t)d\Gamma_t-\int_\Gamma\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}\right](x-t)n(t)F(t)d\Gamma_t$$

$$D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}(x)=\left(D\Phi_{\alpha_0}-\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\right)=\sum_{k=1}^3 i_k\frac{\partial\Phi_{\alpha_0}}{\partial x_k}+\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}\right]=\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(D\Phi_{\alpha_0}-\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(\sum_{k=1}^3 i_k\frac{\partial\Phi_{\alpha_0}}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\right),$$

$$\Phi_{\alpha_0}(x-y)=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\mathrm{Im}\left[\frac{K(i\sqrt{u^2+s}+y_3)}{i\sqrt{u^2+s}+y_3-x_3}\right]\frac{ch(\alpha_0 u)u}{\sqrt{u^2+s}}du.$$

3) $\alpha\in\Re$ и $\alpha_0\neq0$. Заметим, что в этом случае $\alpha_0^2=\hat{\alpha}^2$, $P^+F=(2\alpha_0)^{-1}\cdot f\cdot\alpha$ и $P^-F=(2\alpha_0)^{-1}\cdot F\cdot\overline{\alpha}$. Тогда $D_\alpha F=D_{2\alpha}P^+F+DP^-F$ и $K_\alpha=P^+K_{2\alpha}+P^-K_0$.

$$(K_\alpha F)(x):=-\int_\Gamma K_\alpha(x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y=-\int_\Gamma\left[P^+K_{2\alpha_0}+P^-K_0\right](x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y=$$

$$=\int_\Gamma\frac{\alpha}{2\alpha_0}\left[D_{-2\alpha_0}\Phi_{2\alpha_0}\right](x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y+\frac{\overline{\alpha}}{2\alpha_0}\int_\Gamma\left[D_{-0}\Phi_0\right](x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y.$$

$$D_{-\alpha_0}\Phi_{\alpha_0}(x)=\left(D\Phi_{\alpha_0}-\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0\right)=\sum_{k=1}^3 i_k\frac{\partial\Phi_{\alpha_0}}{\partial x_k}+\Phi_{\alpha_0}\cdot\alpha_0,$$

$$\left[D_{-2\alpha_0}\Phi_{2\alpha_0}\right](x-y):=\sum_{k=1}^3 i_k\frac{\partial\Phi_{2\alpha_0}(x-y)}{\partial x_k}+\Phi_{2\alpha_0}\cdot2\alpha_0$$

$$\left[D_{-0}\Phi_0\right](x-y):=\sum_{k=1}^3 i_k\frac{\partial\Phi_0(x-y)}{\partial x_k}+\Phi_0(x-y)\cdot0=\sum_{k=1}^3 i_k\frac{\partial\Phi_0(x-y)}{\partial x_k}=$$

$$=\sum_{k=1}^3 i_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty\mathrm{Im}\left[\frac{K(w)}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}\right].$$

4) $\alpha\in\Re$ и $\alpha_0=0$. Тогда $K_\alpha=K_0+\Phi_0\alpha$

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

$$(K_\alpha F)(x) := -\int_\Gamma K_0(x-y)n(y)F(y)d\Gamma_y - \int_\Gamma \Phi_0(x-y)n(y)F(y)\cdot\alpha\, d\Gamma_y =$$

$$= \int_\Gamma [D_0\Phi_0](x-y)n(y)F(y)\, d\Gamma_y - \int_\Gamma \Phi_0(x-y)n(y)F(y)\cdot\alpha\, d\Gamma_y =$$

$$= \int_\Gamma \sum_{k=1}^{3} i_k \frac{\partial \Phi_0(x-y)}{\partial x_k} n(y)F(y)\,d\Gamma_y - \int_\Gamma \Phi_0(x-y)n(y)F(y)\cdot\alpha\, d\Gamma_y =$$

$$= \int_\Gamma \sum_{k=1}^{3} i_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\frac{1}{2\pi^2 K(x_3)}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}\right].n(y)F(y)\,d\Gamma_y -$$

$$-\int_\Gamma \left[-\frac{1}{2\pi^2 K(x_3)}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(w)}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}\right] n(y)F(y)\cdot\alpha\, d\Gamma_y \quad .$$

$$K_\alpha F = \begin{cases} P^+K_\xi F + P^-K_\varsigma F \quad \alpha\notin\Re,\ \hat{\alpha}\neq 0, \\ K_\alpha F + \dfrac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[K_{\alpha_0}F\right]\cdot\hat{\alpha}, \quad \alpha\notin\Re,\ \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+K_{2\alpha_0}F + P^-K_0 F,\ \alpha\in\Re,\ \alpha_0\neq 0, \\ K_0F - V_0F\cdot\alpha, \quad \alpha\in\Re,\ \alpha_0 = 0, \end{cases}$$

$$T_\alpha F = \begin{cases} P^+T_\xi F + P^-T_\varsigma F \quad \alpha\notin\Re,\ \hat{\alpha}\neq 0, \\ T_{\alpha_0} F + \dfrac{\partial}{\partial\alpha_0}\left[T_{\alpha_0}F\right]\cdot\hat{\alpha}, \quad \alpha\notin\Re,\ \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+T_{2\alpha_0}F + P^-T_0 F,\ \alpha\in\Re,\ \alpha_0\neq 0, \\ T_0F + W_0F\cdot\alpha, \quad \alpha\in\Re,\ \alpha_0 = 0 \end{cases}$$

Справедливо обобщенная интегральная формула Коши аналогично [20].

Теорема 1. Пусть $F\in\ker D_\alpha \cap C(\overline{\Omega})$, $\alpha\in Q$. Тогда

$(K_\alpha F)(x) = F(x)$, $x\in\Omega$, (12)

где

$$K_\alpha F = \begin{cases} P^+K_\xi F + P^-K_\varsigma F,\ \alpha\notin\Re\ и\ \hat{\alpha}\neq 0, \\ K_{\alpha_0}F + \dfrac{\partial}{\partial\alpha_0}[K_{\alpha_0}F],\quad \alpha\notin\Re\ и\ \hat{\alpha}^2 = 0, \\ P^+K_{2\alpha}F + P^-K_0F,\ \alpha\in\Re\ и\ \alpha_0\neq 0, \\ K_0F - V_0F\alpha, \qquad \alpha\in\Re\ и\ \alpha_0 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

$(K_\alpha F)(x) := -\int_{\partial\Omega} K_\alpha(x-y)n(y)F(y)dS_y$, $x\in R^3\setminus\partial\Omega$, (14)

$(V_\mu F)(x) := \int_{\partial\Omega} h_\mu(x-y)n(y)F(y)dS_y$, $\mu\in C$, $x\in R^3$, (15)

$n(y)$ - внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y.

Поскольку функция Карлемана отличается от фундаментальных решений на решение, транспонированной системы, то интегральная формула Коши остаётся справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на функцию Карлемана

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3}\Phi(y,x,\alpha)=\int_0^\infty \frac{1}{u^2+r^2}\left(\cos\sigma\sqrt{u^2+s}-(y_3-x_3)\frac{\sin\sigma\sqrt{u^2+s}}{\sqrt{u^2+s}}\right)ch(\alpha u)du \quad (16)$$

Положим

$$F_\sigma(x)=(K_\alpha^\sigma F)(x),\ x\in\Omega. \quad 17)$$

Верна следующая

Теорема 2. Пусть $F\in\ker D_\alpha\bigcap C(\overline{\Omega})$, $\alpha\in Q$. На части T границы $\partial\Omega$ удовлетворяет условию

$$|F(y)|\le M, \quad (18)$$

где M - заданное положительное число. Тогда для любого $x\in\Omega$ и $\sigma>0$ справедливо неравенство

$$F(x)=\lim_{\sigma\to\infty}F_\sigma(x)=\lim_{\sigma\to\infty}(K_\alpha^\sigma F)(x). \quad 19)$$

References:

1. Moisil Gr.C., Theodoresco N. Founctions holomorphes dans l'espase . Mathematica, – 1931. V.5, 141, – P. 142-153.
2. Крылов Н. М. О кватернионах Роана Гамильтона и понятии моногенности. // ДАН СССР. – 1947. Т. 65. – №9. – С. 799-800.
3. Бицадзе А. В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. –1953. -17:6. – С.525-538.
4. Бицадзе А. В. Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения // ДАН. АН СССР. – 1953. – С.389-392.
5. Mises R. Integral theorems in three-dimentional potential flow.// Bull. Amer. Math. Soc., vol. 50, 1944. – c.509-611.
6. Klaus Gurlebeck, Wolfgang Sprobig Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems – Basel; Boston; Berlin : Birkhauser, 1990.
7. Brackx F., Delanghe K., Sommen F. Clifford analysis. L.: Pitman, 1982. V.76. 308 pp.
8. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ // Теоретическая и математическая физика. 1984.Т. 59. №1. С.3-27.
9. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ. II. Интегральное исчисление // Теорет. и математ. физика. 1984.Т. 60. №2. С.169-198.
10. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск : Изд-во СО АН СССР, 1962. – 92 с.
11. Ярмухамедов Ш. О задаче Коши для уравнения Лапласа // ДАН СССР . – 1977, - т. 235. - №2, - с. 281-284.

12. Кравченко В.В., Шапиро М.В. Об обобщенной системе уравнений Коши-Римана с кватернионным параметром // ДРАН, 1993, т. 329, №5. С. 547 – 549.

13. Ш.Ярмухамедов Об аналитическом продолжении голоморфного вектора по его граничным значениям на куске границы // Изв.АН УзССР. – 1980. – №6. – серия физико-математических наук, С. 34-40.

14. T.Ishankulov Continuation of the solution to the Moisil-Teodoresko‘s system of equations // International conference ILL-POSED AND INVERSE PROBLEMS, August 5-9, 2002, Novosibirsk.

15. Сатторов Э.Н. Регуляризация решения задачи Коши для обобщенной системы Моисил – Теодореско // Дифференциалъные уравнения. – 2008. – Т. 44. - №8. – С. 1100 – 1110.

16. Сатторов Э.Н. О продолжении решений обобщенной системы Коши-Римана в пространстве // Мат. заметки. – 2009. –Т. 85. –вып. 5. май. – С. 768-781.

17. Сатторов Э.Н. О продолжении решения однородной системы уравнений Максвелла // Изв. ВУЗ. Математика. – 2008. - № 8. -С. 78 – 83.

18. Сатторов Э.Н. Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области // Мат. заметки. – 2009. –Т. 86. –вып. 3. сентябр. – С. 445-455.

19. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.

20. Kravchenko V. V., Shapiro M. Integral representations for spatial models of mathematical physics, Addison Wesley Longman, Pitman Research Notes in Mathematics Series 351, –1996.