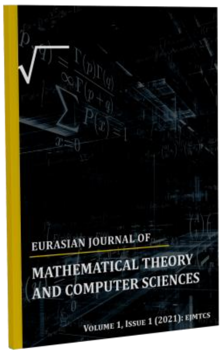
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



ОБ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СВОЙСТВУ МОРЕРА ВДОЛЬ КОМПЛЕКСНЫХ КРИВЫХ

Бекманова П.
Ражабова И.
Нукусский государственный педагогический институт имени Ажинияза
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.10664494

ARTICLE INFO
Received: 08th February 2024
Accepted: 14th February 2024
Online: 15th February 2024
KEY WORDS
Ядро Бохнера-Мартинелли, голоморфная функция, дифференциáльная фóрма.

ABSTRACT
В этом работе изучается семейство кривых L *специального вида, достаточное, чтобы функция* $\phi \in L^p(\partial D),\ p \geq 2$, *обладающая свойством Морера вдоль кривых* $l \in L$, *голоморфно продолжалась в D (* $D-$ *ограниченная область в* $\mathbb{C}^n\,(n>1)$ *со связной гладкой границей* ∂D *класса* C^2 *). Для этой цели рассматривается ядра, стоящие в формуле многомерного логарифмического вычета, изучается его свойства и приводится, в качестве применения, теоремы о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных кривых.*

Пусть $f=(f_1,\dots,f_n)-$ голоморфное отображение из C^n в C^n состоящее из целых функций и имеющее единственный нуль в начало координат, т.е. $f(0)=0$ и $f(z)\neq 0$ при $z\neq 0$. Рассмотрим дифференциальную форму

$$U(w)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}d\overline{w}[k]\wedge dw}{|w|^{2n}},$$

где $d\overline{w}[k]=d\overline{w}_1\wedge\dots d\overline{w}_{k-1}\wedge d\overline{w}_{k+1}\wedge\dots d\overline{w}_n$, а $dw=dw_1\wedge\dots\wedge dw_n$, т.е. $U(w)-$ ядро Бохнера-Мартинелли в нуле. Рассмотрим ограниченную область $D\subset\mathbb{C}^n\,(n>1)$ со связной границей ∂D класса C^1. Если $\mu-$ кратность нуля отображения f в точке $z=0$, то справедлива формула

$$\mu\phi(z)=\int_{\partial D_\zeta}\phi(\zeta)U(f(\zeta-z)),\ z\in D, \tag{1}$$

где ϕ -функция, голоморфная в D и непрерывная на замыкании $\overline{D}$. В форме $U(f(\zeta-z))$ вектор z считается фиксированным. Формула (1) есть формула многомерного логарифмического вычета для отображения f (см. [**1**], гл 1). Нам необходимо доказать эту формулу для интегрируемых функций

Предложение. *Пусть* $\phi \in L^p(D)$, *тогда справедлива формула*

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} \phi(\zeta) U(f(\zeta - z)) - \int\limits_{D_\zeta} \bar{\partial}\phi \wedge U(f(\zeta - z)) = \begin{cases} \mu\phi(z), \ z \in D, \\ 0, \quad z \notin \overline{D}, \end{cases} \qquad (2)$$

в которой интеграл по области $D-$ *абсолютно сходится.*

Голоморфная функция $f \in H^p(D)\ (p > 0)$, если

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int\limits_{\partial D} |f(\zeta - \varepsilon \nu(\zeta))|^p \, d\sigma < +\infty,$$

где $d\sigma-$ элемент поверхности ∂D, а $\nu(\zeta)-$ единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке ζ. Хорошо известно, что нормальные граничные значения функции $f \in H^p(D)$ принадлежат классу $f \in L^p(\partial D)$ (по мере Лебега $d\sigma$) (см. [**3**], [**5**]).

Следствие. *Пусть* $\phi \in L^p(\partial D),\ p \geq 2$ *и*

$$\int\limits_{\partial D_\zeta} \phi(\zeta) U(f(\zeta - z)) = \begin{cases} F^+(z), \ z \in D, \\ F^-(z), \ z \notin \overline{D}. \end{cases} \qquad (3)$$

Тогда функции $F^{\mp}(z)$ *являются класса* L^p *вплоть до границы области.*

Рассмотрим некоторые свойства определителей, составленных из дифференциальных форм. Пусть $\theta^1, \ldots, \theta^m - n$ мерные векторы, состоящие из внешних дифференциальных форм. Введем определители порядка n:

$$D_{\nu_1, \ldots, \nu_m}(\theta^1, \ldots, \theta^m),$$

первыми ν_1 столбцами которые являются векторы θ^1, вторыми ν_2 столбцами - векторы θ^2 и т.д., последними ν_m столбцами - векторы θ^m, $\nu_1 + \ldots + \nu_m = n$. (см. [**2**], §1). Рассмотрим вектор

$$\eta = \frac{\overline{f}}{|f|^2} = \left(\frac{\overline{f}_1}{|f|^2}, \ldots, \frac{\overline{f}_n}{|f|^2} \right).$$

Тогда $\langle \eta, f \rangle = \eta_1 f_1 + \ldots + \eta_n f_n = 1$ вне нулей отображения f. Следовательно, ядро $U(f)$ примет вид

$$U(f) = \frac{1}{(2\pi i)^n} D_{1,n-1}(\eta, \bar{\partial}_\zeta \eta) \wedge df = \frac{1}{(2\pi i)^n} \frac{1}{|f|^{2n}} D_{1,n-1}(\overline{f}, \overline{\partial_\zeta f}) \wedge df.$$

В выражении $D_{1,n-1}$ первый столбец можем заменить на любой τ такой, что $\langle \tau, f\rangle = \tau_1 f_1 + \ldots + \tau_n f_n = 1$. Действительно, определитель

$$D_{1,n-1}(\eta - \tau, \bar{\partial}_\zeta \eta) = 0$$

в силу того, что в определителе есть линейно зависимые строки:

$$\langle \eta - \tau, f\rangle = 0 \text{ и } \langle \bar{\partial}_\zeta \eta, f\rangle = \bar{\partial}_\zeta \langle \eta, f\rangle = 0.$$

Пусть $\psi = \psi_1 f_1 + \ldots + \psi_n f_n$ где функции $\psi_j = \psi_j(\zeta, z),\ \ j = 1,\ldots,n$ -голоморфны в $C^n \times C^m$ и $\tau = \dfrac{1}{\psi}(\psi_1,\ldots,\psi_n)$. Тогда $\langle \tau, f\rangle = 1$ вне нулей функции ψ. Положим,

$$U_\psi = \frac{1}{(2\pi i)^n} D_{1,1,n-2}(\tau, \eta, \bar{\partial}_\zeta \eta) \wedge df.$$

Лемма 1. *Справедливы формулы*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} U(f) = \frac{n-1}{(2\pi i)^n} \bar{\partial}_\zeta D_{1,1,n-2}\left(\tau, \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_j}, \bar{\partial}_\zeta \eta\right) \wedge df \qquad (4)$$

для всех $\zeta \neq z$.

Лемма 1 показывает, что производные по $\bar{z}_j$ формы $U(f)$ являются $\bar{\partial}-$ дифференциалами форм с точечными особенностями $\zeta = z$.

Используя свойство однородности определителя формулу (4) можно переписать в виде (см. [**5**]):

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} U(f) = \frac{n-1}{(2\pi i)^n} \bar{\partial}_\zeta \left[\frac{1}{|f|^{2n}} D_{1,1,n-2}\left(\bar{f}, \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_j}, \overline{\partial_\zeta f}\right) \wedge df \right].$$

Лемма 2. *Имеет место соотношения*

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} U(f) = -\frac{1}{(2\pi i)^n} \bar{\partial}_\zeta \left[\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{|f|^{2n}} D_{1,1,n-2}\left(A^s, \frac{\overline{\partial f}}{\partial z_j}, \overline{\partial_\zeta f}\right) \wedge d\zeta \right) \right],$$

где A^s *равно s- ому столбцу из алгебраических дополнений* A_k^s *к элементам матрицы Якоби* $\left\| \dfrac{\partial f_s}{\partial z_k} \right\|_{s,k=1}^{n}$.

Используя полученные выше утверждения получаем следующую теорему (см. [**4**]).

Теорема. *Если для функции* $\phi \in L^p(\partial D),\ p \geq 2$ *выполнено условие*

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

$$F^{-}(z)=\int\limits_{\partial D_{\zeta}}\phi(\zeta)U(f(\zeta-z))=0,\ z\notin\overline{D}$$
,

то ϕ *голоморфно продолжается в* D *до функции* $F\in H^{p}(D)$.

References:

1. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979, 364 с.
2. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных.-Москва, Наука, 1964.-410с.
3. Кытманов А.М. Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения. Новосибирск: Наука, 1992, 238 с.
4. Отемуратов Б.П. Теорема Морера для интегрируемых функций вдоль комплексных кривых//Вестник НУУз. 2011г. №1/1, с. 249-257.
5. Хенкин Г.М., Чирка Е.М. Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 4. С. 13-142.