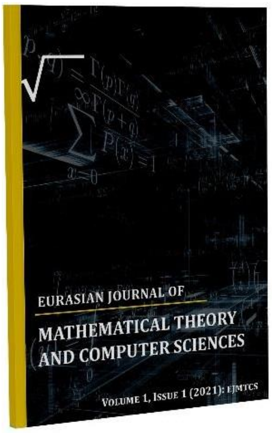
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz




# ОБ ОДНОМ ПРИЛОЖЕНИИ СИММЕТРИЧНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

**Абдиназарова Мафтуна Асадулло кизи[1], Хакимов Абдусалом[2]**

[1] Студентка 2-го курса факультета Математики и информатики Навоийского Государственного Педагогического института,

[2] Доцент кафедры Математики Навоийского Государственного Педагогического института, кандидат физико-математических наук

https://doi.org/10.5281/zenodo.6570385

## ИСТОРИЯ СТАТЬИ

Принято: 01 Май 2022 г.
Утверждено: 10 Май 2022 г.
Опубликовано: 17 Май 2022 г.

## КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

*Алгебраическая система уравнений, симметрические многочлены, формулы Виета, Кардано, Феррари.*

## АННОТАЦИЯ

*В статье рассмотрено решение системы алгебраических уравнений в виде*

$$\begin{cases} x^n + y^n = a, \\ xy = b. \end{cases} \qquad (1)$$

*Показано, что при $1 \le n < 10$ система уравнений (1) можно решить с помощью формул Виета, Кардано, Феррари. При этом использованы симметрические многочлены*

$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$
$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,$
...
$\sigma_n = x_1x_2 \ldots x_n.$

*Доказано, что при $n \ge 10$ систему уравнений (1) нельзя решить с помощью кубатурных формул.*

Многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется симметрическим, если он не изменяется при любой перестановке входящих в него переменных. Многочлены
$\sigma_1=x_1+x_2+\ldots+x_n,$
$\sigma_2=x_1 x_2+x_1 x_3+\ldots+x_{n-1} x_n,$
$\sigma_n=x_1 x_2\ldots x_n$
называются основными симметрическими многочленами от n переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$.
Основная теорема теории симметрических многочленов заключается в том, что всякий симметрический многочлен $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ (над данным полем P или областью целостности K) можно представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов (над P или K):
$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\Phi(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$.

Остановимся на некоторых приложениях теории симметрических многочленов.
К вопросам, непосредственно примыкающим к курсу алгебры средней школы (этот материал с успехом может быть изучен на кружке в IX – X классах). Мы ограничимся рассмотрением многочленов от двух переменных x и y.
В приложениях часто встречаются степенные суммы
$S_k=x^k+y^k, (k=\overline{1,n})$

т.е. суммы k-х степеней переменных. Выражения этих сумм через основные симметрические многочлены
σ_1=x+y и σ_2=xy
легко находятся последовательно из рекуррентной формулы
S_k=σ_1 S_(k-1) – σ_2 S_(k-2). (2)
Убедимся в справедливости формулы (2) умножив обе части равенства S_(k-1)=x^(k-1)+y^(k-1) на σ_1=x+y, получим:
σ_1 S_(k-1)=(x+y)(x^(k-1)+y^(k-1) )=x^k+〖x^(k-1) y+xy^(k-1)+y〗^k= =(x^k+y^k )+xy(x^(k-2)+y^(k-2) )=S_k+σ_2 S_(k-2),k=3,4,...
О т к у д а следует формула (2).
В ы р а ж е н и я для S_1 и S_2 находятся непосредственно: S_1=x+y=σ_1, S_2=x^2+y^2=(x+y)^2−2xy =σ_1^2-2σ_2 . Зная S_1 и S_2, находим S_3 по формуле (2), затем S_4 и т.д. Приведём таблицу выражений степенных сумм от переменных x, y через σ_1=x+y и σ_2=xy:

| Выражение $S_k = x^k + y^k$ через $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$ |
|---|
| $S_1 = x + y = \sigma_1$<br>$S_2 = x^2 + y^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$<br>$S_3 = x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$<br>$S_4 = x^4 + y^4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2^2$<br>$S_5 = x^5 + y^5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$<br>. . . |

**Задача.** Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 72, \\ x + y = 6. \end{cases}$$
**Решение**. Если обе части уравнений симметрично зависят от $x, y$, то удобнее перейти к новым переменным: $\sigma_1 = x + y$ и $\sigma_2 = xy$. Используя таблицу степенных сумм, получим новую систему:
$$\begin{cases} {\sigma_1}^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 72, \\ \sigma_1 = 6. \end{cases}$$
Для переменных $x$, $y$ получим, таким образом, систему:
$$\begin{cases} x + y = 6, \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$$
имеющую два решения: $x_1 = 4$, $y_1 = 2$ и $x_2 = 2, y_2 = 4$.
**Ответ.** $\{(4;2);\ (2;4)\}$.
**Замечание.** Используя формулы Виета, последнюю систему можно свести к квадратному уравнению
$$z^2 - 6z + 8 = 0$$
корнями, которого являются $z_1 = 4$ и $z_2 = 2$. Так как $x, y$ симметрично входят в первоначальную систему, то получаем два решения системы:
$x_1 = z_1 = 4,\ y_1 = z_2 = 2;\quad x_2 = z_2 = 2,\quad y_2 = z_1 = 4.$
**Теорема.** Пусть задана система алгебраических уравнений в виде
$$\begin{cases} x^n + y^n = a, \\ xy = b. \end{cases} \qquad (1)$$
$1^0$. Если $n = 2, 3$, то систему уравнений (1) можно свести к линейным уравнениям;
$2^0$. Если $n = 4, 5$, то систему уравнений (1) можно свести к квадратному уравнению;
$3^0$. Если $n = 6, 7$, то систему уравнений (1) можно свести к кубическому уравнению;

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

$4^0$. Если $n = 8, 9$, то систему уравнений (1) можно свести к алгебраическому уравнению 4-го порядка;

$5^0$. Если $n > 10$, то систему уравнений (1) невозможно решить с помощью кубатурных формул.

Доказательство теоремы вытекает из таблицы 1.

## Литературы:

1. Болтянского В.Г., Виленкина Н.Я., Симметрия в алгебре.– 2-е изд. – М.: МЦНМО, 2002.
2. Солодовников А.С., Родина М. А., Задачник-практикум по алгебре. – М.: Просвещение, 1985.
3. Yuldashev Z.Kh., Ashurova D.N., Innovative-Didactic Program Complex and New Formalized Model of Education//Malaysian Journal of Mathematical Sciences 6(1): Malaysia, 2012. – P. 97-103.