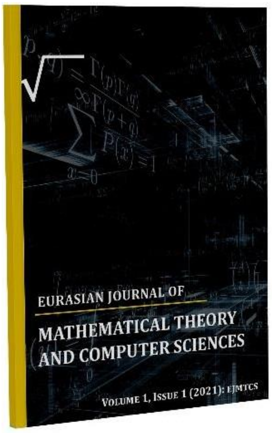
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz



ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Шарипова Наргиза
Кафедра Высшая математика, Бухарский инженерно-технологический институт, Бухара, Узбекистан
https://doi.org/10.5281/zenodo.6604232

ИСТОРИЯ СТАТЬИ
Принято: 10 Май 2022 г.
Утверждено: 14 Май 2022 г.
Опубликовано: 31 Май 2022 г.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
нелокальный, оценочная ошибка, разностная задача, разностный оператор, нелинейный

АННОТАЦИЯ
Исследована нелокальная задача для эллиптического уравнения в прямоугольной области. Строилась прямоугольная сетка для соответствующей разностной задачи и оценивалась погрешность приближенных решений нелокальных задач. Различные прикладные задачи (теплопроводности [1], [2], [3], механики жидкости [4], теории упругости и оболочек [5] и др.) сводятся к нелокальным краевым задачам.

Пусть $\Omega=\{0<x<a,0<y<b\}$. Обозначим через $\Gamma^1=\{0\le x\le a, y=b\}$, $\Gamma^2=\{x=0,0<y<b\}$ $\Gamma^3=\{0\le x\le a, y=0\}$, $\Gamma^4=\{x=a,0<y<b\}$ $\Gamma^l=\{x=l,0<y<b,\ 0<l<b\}, \Gamma=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma^i$, $\sigma=\Gamma^1\bigcup\Gamma^3$, $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$.

Предположим, что $f(x,y,z,p,q)$ заданная непрерывная функция, определяемая $\forall(x,y)\in\overline{\Omega}$ и для всех *z*, *p*, *q*. Предположим, что частные производные числа f_z', f_p', f_q' существуют и удовлетворяют условию

$$f_z'\ge 0, \quad (1)$$

$$|f_p'|, |f_q'|\le M<\infty. \quad (2)$$

Пусть $L[u]\equiv\Delta u-f(x,y,u,u_x,u_y)$. Предположим, что φ,ψ — заданные непрерывные функции своих определений областей.

Требуется найти непрерывную функцию $u(x,\ y)$ в $\overline{\Omega}$, дважды непрерывно дифференцируемую в Ω, удовлетворяющую уравнению

$$L[u]=0 \quad (3)$$

и граничные условия

$$u|_\sigma=\varphi, \quad (4)$$

$$l[u]=u(l,y)-\alpha(y)u(a,y)=\psi(y),\ 0<y<b, \quad (5)$$

$$\alpha(y)\ge 1,\ 0<y<b, \quad (6)$$

$$l^{(1)}[u]=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\beta(y)\frac{\partial u}{\partial y}+\delta(y)u\right)\right|_{\Gamma^2}=\gamma(y),\ \delta(y)\le 0\cdot \quad (7)$$

Пусть $h_1=\dfrac{a}{N_1},\ h_2=\dfrac{b}{N_2}$. Мы строим область сетки с линиями $x=x_i,\ y=y_j,\ i=\overline{0,N_1},\ j=\overline{0,N_2}$ и пусть $x_k<l<x_{k+1}$.

Введем обозначение

$$\Omega_h=\{(x_i,y_j): i=\overline{1,N_1-1},\ j=\overline{1,N_2-1}\},$$
$$\Gamma_h^1=\{(x_i,b): i=\overline{1,N_1}\},\ \Gamma_h^2=\{(0,y_j): j=\overline{1,N_2-1}\},$$
$$\Gamma_h^3=\{(x_i,0): i=\overline{1,N_1}\},\ \Gamma_h^4=\{(a,y_j): j=\overline{1,N_2-1}\},$$
$$\sigma_h=\Gamma_h^1\cup\Gamma_h^3,\ \Gamma_h=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_h^i,\ \overline{\Omega}_h=\Omega_h\cup\Gamma_h.$$

Аппроксимируем операторы L и l разностными операторами L_h, l_h определяемыми следующим образом:

$$L_h[u_{ij}]\equiv\Delta_h[u_{ij}]-f\left(x_i,y_j,u_{ij},D_{h_1x^\alpha}[u_{ij}],D_{h_2y^\alpha}[u_{ij}]\right), \quad (8)$$

$$l_h[u_{N_1j}]\equiv\frac{l-x_k}{h_1}u_{k+1j}+\frac{x_{k+1}-l}{h_1}u_k-\alpha_j u_{N_1j}, \quad (9)$$

где

$$\begin{cases}\Delta_h[u_{ij}]=u_{\bar{x}x}+u_{\bar{y}y},\ u_{\bar{x}x}=\dfrac{u_{i+1j}-2u_{ij}+u_{i-1j}}{h_1^2}\\ u_{\bar{y}y}=\dfrac{u_{ij+1}-2u_{ij}+u_{ij-1}}{h_2^2},\ D_{h_1\overset{0}{x}}[u_{ij}]=\dfrac{u_{i+1j}-u_{i-1j}}{2h_1}\\ D_{h_2\overset{0}{y}}[u_{ij}]=\dfrac{u_{ij+1}-u_{ij-1}}{2h_2}.\end{cases} \quad (10)$$

Сформулируем разностную задачу, соответствующую поставленной задаче, чтобы найти функцию U определенную в $\overline{\Omega}_h$ такую, что

$$L_h[U_{ij}]=0 \text{ in } \Omega_h, \quad (11)$$

$$l_h[U_{N_1j}]=\psi_j \text{ in } \Gamma_h^4, \quad (12)$$

$$U_{ij}=\varphi_{ij} \text{ in } \sigma_h, \quad (13)$$

$$l_h^{(1)}[U_{0j}]=\frac{U_{ij}-U_{0j}}{h_1}+\beta_j^+\frac{U_{0j+1}-U_{0j}}{h_2}+\beta_j^-\frac{U_{0j}-U_{0j-1}}{h_2}+\delta_jU_{0j}=\gamma_j \text{ in } \Gamma_h^2, \quad (14)$$

где

$$\beta_j^+=\frac{\beta_j+|\beta_j|}{2}\ge 0,\ \beta_j^-=\frac{\beta_j-|\beta_j|}{2}\le 0.$$

Будем считать, что область $\overline{\Omega}_h$ связна и удовлетворяет неравенству

$$M_h<2\theta, \quad (15)$$

где $h=\max\{h_1, h_2\}$, $0<\theta<1$ – некоторое фиксированное число.

Основные результаты

Рассмотрим линейный разностный оператор

$$\Lambda_h[U_{ij}]=\begin{cases}\Lambda_h'[U_{ij}] \text{ in } \Omega_h\\ l_h[U_{N_1j}] \text{ in } \Gamma_h^4\\ l_h^{(1)}[U_{0j}] \text{ in } \Gamma_h^2\end{cases} \quad (16)$$

где

$$\Lambda_h'[U_{ij}]=\Delta_h[U_{ij}]+\xi_{ij}D_{h_1\overset{0}{x}}[U_{ij}]+\eta_{ij}D_{h_2\overset{0}{y}}[U_{ij}]-\mu_{ij}U_{ij},\ |\xi_i|,|\eta_{ij}|\le M, \quad (17)$$

$$\mu_{ij}\ge 0. \quad (18)$$

По стандартной схеме доказана следующая лемма.

Лемма 1. Пусть функция $V\neq const$ определенная в $\overline{\Omega}_h$, такая, что $\Lambda_h[V]\ge 0$ ($\Lambda_h[V]\le 0$). Тогда V может принимать наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение только в узловых точках σ_h.

Пусть U приближенное решение задачи (11) — (14).

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

Теорема 1. Пусть текущее решение *u* уравнения (3)-(7) имеет ограниченные третьи производные в Ω и вторые производные непрерывны в $\overline{\Omega}$. Тогда ошибка приближенного решения $\varepsilon_{ij} = u_{ij} - U_{ij}$ удовлетворяет уравнению
$\varepsilon_{ij} = O(h)$.

Доказательство. На основании формулы Тейлора имеем

$$\begin{cases} \Lambda'_h[\varepsilon_{ij}] = O(h) & \text{in } \Omega_h \\ l_h[\varepsilon_{N_1 j}] = O(h^2) & \text{in } \Gamma_h^4 \\ \varepsilon_{ij} = 0, & \text{in } \sigma_h \\ l_h^{(1)}[\varepsilon_{0j}] = O(h) & \text{in } \Gamma_h^2. \end{cases} \quad (19)$$

Представим решение (19) в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^2, \quad (20)$$

где

$$\begin{cases} \Lambda'_h[\varepsilon_{ij}^1] = O(h) & \text{in } \Omega_h \\ \varepsilon_{N_1 j}^1 = 0 & \text{in } \Gamma_h^4 \\ \varepsilon_{ij}^1 = 0, & \text{in } \sigma_h \\ l_h^{(1)}[\varepsilon_{0j}^1] = O(h) & \text{in } \Gamma_h^2. \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \Lambda'_h[\varepsilon_{ij}^2] = 0 & \text{in } \Omega_h \\ l_h[\varepsilon_{N_1 j}^2] = -l_h[\varepsilon_{N_1 j}^1] O(h^2) & \text{in } \Gamma_h^4 \\ \varepsilon_{ij}^2 = 0, & \text{in } \sigma_h \\ l_h^{(1)}[\varepsilon_{0j}^2] = 0 & \text{in } \Gamma_h^2. \end{cases} \quad (22)$$

Сначала оценим систему (21). Рассмотрим функцию

$$g(x,y) = \frac{1}{K}\left(e^{\nu_0 a} - e^{\nu_0 x}\right),$$

где

$$\nu_0 = \frac{M}{\theta}\operatorname{arcth}\left(\frac{3\theta - \theta^2}{2}\right), \quad k = \mu_0 \nu_0, \quad \mu_0 = \min\left\{1, \frac{M}{2}(1-\theta)\right\}$$

.

Легко убедиться, что

$$\begin{cases} \Lambda'_h[g_{ij}] \le -1 & \text{in } \Omega_h \\ l_h^{(1)}[g_{0j}] \le -1 & \text{in } \Gamma_h^2. \end{cases} \quad (23)$$

На основании (21), (23) и леммы 1 получаем, что функция

$$G_{ij}^{\pm} = c \cdot h \cdot g_{ij} \pm \varepsilon_{ij}^1$$

положительный на $\overline{\Omega}$ (для выбранной конечной константы C).

Из этого неравенства следует, что

$$\max_{\Omega_h} |\varepsilon_{ij}^1| \le C_1 h, \quad C_1 = const > 0. \quad (24)$$

Обозначим через $w = \max_{\Gamma_h^4} |\varepsilon_{N_1 j}^2|$ и пусть $\overline{\omega}_{ij}$ будет решением

$$\Lambda'_h[\overline{\omega}_{ij}] = 0 \quad в \ \Omega_h,$$

$$\overline{\omega}_{N_1 j} = w \quad в \ \Gamma_h^4,$$

$$\overline{\omega}_{ij} = 0 \quad в \ \sigma_h,$$

$$l_h^{(1)}[\overline{\omega}_{0j}] = 0 \quad в \ \Gamma_h^2.$$

Из леммы 1 следует, что

$$|\varepsilon_{ij}^2| \le \overline{\omega}_{ij} \ \text{в} \ \overline{\Omega}_h, \quad (25)$$

$$\overline{\omega}_{ij} \le \tau_i w, \ 0 < \tau_i < 1 \ \text{в} \ \Omega_h \quad (26)$$

С другой стороны

$$l_h[\varepsilon_{N_1 j}^2] = -l_h[\varepsilon_{N_1 j}^1] + O(h^2) \ \text{in} \ \Gamma_h^4.$$

Отсюда соответственно (25), (26) имеем

$$\alpha_j |\varepsilon_{N_1 j}^2| \le \frac{l - x_k}{h_1}|\varepsilon_{k+1j}^2| + \frac{x_{k+1} - l}{h_1}|\varepsilon_{kj}^2| + \frac{l - x_k}{h_1}|\varepsilon_{k+1j}^1| + \frac{x_{k+1} - l}{h_1}|\varepsilon_{k+1j}^1| + C_2 h^2$$

или

$$\alpha_j w \le \tau w + C_1 h + C_2 h,$$

где

$$\tau = \max\{\tau_{k+1}, \tau_k\}.$$

Следовательно, имеем

$$w \le \frac{C_3 h}{\alpha_j - \kappa_i} \le C_4 h, \quad (27)$$

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

где

$$C_4 = \frac{C_3}{\min\limits_j(\alpha_j - \tau)}.$$

Тогда из (25)-(27) имеем

$$\max_{\Omega_h} |\varepsilon_{ij}^2| \le C_5 h, \quad C_5 = \max_i \tau_i C_4. \qquad (28)$$

На основании (20), (24) и (28) имеем

$$\max_{\Omega_h} |\varepsilon_{ij}| \le C_6 h, \qquad (29)$$

где $C_6 = C_1 + C_5$.

Ниже мы покажем, что наложением дополнительных условий на функции $\beta(y)$, $\delta(y)$ можно улучшить порядок с точности на h_2.

Как видно из вышеизложенного, достаточно повысить порядок аппроксимации оператора $l_h^{(1)}$.

Предположим, что $h_1 = wh^2$ $(0 < w \le 1)$ и $\beta(y)$, $\delta(y)$ удовлетворяют одному из следующих условий

$$|\beta(y)| < w, \qquad (30)$$

$$|\beta(y)| \ge w, \ \delta'(y) \le 0, \qquad (31)$$

$$|\beta(y)| \le -w, \ \delta'(y) \ge 0. \qquad (32)$$

Рассмотрим операторы

$$l_{1h}^{(1)}[U_{0j}] \equiv \frac{U_{1j} - U_{0j}}{h_1} + \beta_j \frac{U_{0j+1} U_{0j-1}}{2h_2} + \delta_j U_{0j}, \qquad (33)$$

$$l_{2h}^{(1)}[U_{0j}] \equiv \frac{U_{1j} - U_{0j}}{h_1} + \beta_j \frac{U_{0j+1} - U_{0j}}{h_2} + \delta_j U_{0j}, \qquad (34)$$

$$l_{3h}^{(1)}[U_{0j}] \equiv \frac{U_{1j} - U_{0j}}{h_1} + \beta_j \frac{U_{0j} - U_{0j-1}}{h_2} + \delta_j U_{0j}. \qquad (35)$$

Пусть

$$\left|\frac{\partial^p u_{0j}}{\partial x^p}\right|_{(0,j)}, \quad \left|\frac{\partial^p u_{0j}}{\partial y^p}\right|_{(0,j)} \le M_j^{(p)}, \quad (p \ge 1).$$

Учитывая (3), (7), (33) и применяя формулу Тейлора, легко видеть, что

$$\left|\bar{l}_{1h}^{(1)} u_{0j} - \left(l^{(1)} u\right)_{(0,j)}\right| \le c^{(1)} h_2^2, \qquad (36)$$

где

$$\bar{l}_{1h}^{(1)} u_{0j} \cong l_{1h}^{(1)} u_{0j} + \frac{h_1\left(u_{0j+1} - 2u_{0j} + u_{0j-1}\right)}{2h_2^2} - \frac{h_1}{2} f\left\{0, y_j, u_{0j}, D_{h_1 x}[u_{0j}], D_{h_2 y}[u_{0j}]\right\},$$

$$D_{h_1 x}[u_{ij}] = \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_1}, \ D_{h_2 y}[u_{ij}] = \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_2}, \ C^{(1)} = \max_j \left\{\frac{2\left(w^2 + w + \beta\right) + h_1 M}{12} M_j^{(3)} + \frac{w^2 M}{4} M_j^{(2)}\right\}.$$

Действительно, из (33) имеем:

$$l_{1h}^{(1)} u_{0j} = \left(l^{(1)} u\right)_{(0,j)} + \frac{h_1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(0,j)} + R_j^{(1)}, \ R_j^{(1)} = \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{(\xi_0^{(1)}, j)} + \frac{h_2^2}{12}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(1)})} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(2)})}\right]\beta_j.$$

Из (3) имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(0,j)} = -\frac{u_{0j+1} - 2u_{0j} + u_{0j-1}}{h_2^2} + f\left(0, y_j, u_{0j}, D_{h_1 x}[u_{0j}], D_{\overset{0}{h_2 y}}[u_{0j}]\right) -$$

$$- \frac{h_2}{6}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(3)})} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(4)})}\right] + f_p'\left(0, y_j, u_{0j}, p_j, q_j\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(\xi_0^{(2)}, j)} \frac{h_1}{2} +$$

$$+ \frac{h_2^2}{12}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(3)})} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(4)})}\right] f'_q\left(0, y_j, u_{0j}, p_j q_j\right).$$

С учетом этого $l_{1h}^{(1)} u_{ij}$, получаем:

$$l_{1h}^{(1)} u_{0j} = \left(l^{(1)} u\right)_{(0,j)} - \frac{h_1\left(u_{0j+1} - 2u_{0j} + u_{0j-1}\right)}{2h_2^2} + \frac{h_1}{2} f'\left(0, y_j, u_{0j}, D_{h_1 x}[u_{0j}], D_{\overset{0}{h_2 y}}[u_{0j}]\right) + \overline{R}_j^{(1)},$$

где

$$\overline{R}_j^{(1)} = \frac{h_1^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{(\xi_i^{(1)}, j)} + \frac{h_2^2}{12}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(1)})} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(2)})}\right]\beta_j - \frac{h_1 h_2}{12}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(3)})} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(4)})}\right] +$$

$$+ \frac{h_1^2}{4} f_p'\left(0, y_j, u_{0j}, p_j, q_j\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(\xi_0^{(2)}, j)} + \frac{h_1 h_2^2}{24} f_q'\left(0, y_j, u_{0j}, p_j, q_j\right)\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(3)})} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(4)})}\right]$$

Следовательно, мы находим, что

$$\bar{l}_{1h}^{(1)} u_{0j} = \left(l^{(1)} u\right)_{(0,j)} + \overline{R}_j^{(1)},$$

вследствие этого

$$\left|\bar{l}_{1h}^{(1)}u_{0j} - \left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)}\right| \le \left|\overline{R}_j^{(1)}\right|.$$

Отсюда следует (36).

Теперь докажем что

$$\left|\bar{l}_{2h}^{(1)}u_{0j} - \left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)}\right| \le C^{(2)}h_2^2, \qquad (37)$$

где

$$\bar{l}_{2h}^{(1)}u_{0j} \equiv l_{2h}^{(1)}u_{0j} + \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j}D_{h_1h_2xy}[u_{0j}] + \frac{\delta_j}{\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)D_{h_2y}[u_{0j}] + \frac{\delta'_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)u_{0j} -$$

$$-\frac{\gamma'_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right) - \frac{h_1}{2}f\left(0, y_j, u_{0j}, D_{h_1x}[u_{0j}], D_{h_2y}[u_{0j}]\right),$$

$$C^{(2)} = \max_j\left\{\left[\frac{\beta_j + w^2}{6} + \frac{\left(\beta_j - w\right)\left(1 - w\right)}{4\beta_j} + \frac{h_1 M}{12}\right]M_i^{(3)} + \left[\frac{|\delta_j + \beta'_j|\left(\beta_j - w\right)}{4\beta_j} + \frac{w^2 M}{4}\right]M_j^{(2)}\right\},$$

$$D_{h_1h_2xy}[u_{0j}] = D_{h_1x}\left\{D_{h_2y}[u_{0j}]\right\}.$$

Предположим, что $\beta(y) \ne 0$. Тогда из (7) имеем:

$$\frac{\partial^2 u(0,u)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\beta(y)}\frac{\partial^2 u(0,y)}{\partial x \partial y} - \frac{\delta'(y)}{\beta(y)}u(0,y) - \frac{\delta(y) + \beta'_j}{\beta(y)}\frac{\partial u(0,y)}{\partial y} + \frac{\gamma'(y)}{\beta(y)}. \qquad (38)$$

Очевидно

$$l_{2h}^{(1)}u_{0j} = \left(l_3 u\right)_{(0,j)} + \frac{h_1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(0,j)} + \frac{h_2}{2}\beta_j\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(0,j)} + R_j^{(2)},$$

где

$$R_j^{(2)} = \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{\left(\xi_0^{(1)}, j\right)} + \beta_j\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{\left(0, \eta_0^{(1)}\right)}.$$

Из (3) получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(0,j)} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(0,j)} + f\left(0, y_j, u_{0j}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,j)}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,j)}\right).$$

Тогда

$$l_{2h}^{(1)}u_{0j} = \left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)} + \frac{1}{2}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(0,j)} + \frac{h_1}{2}f\left(0, y_j, u_{0j}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,j)}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,j)}\right) + R_j^{(2)}$$

Принимая во внимание (38)

$$l_{2h}^{(1)}u_{0j} = \left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)} + \frac{1}{2}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)\left[-\frac{1}{\beta_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,j)} - \frac{\delta'_j}{\beta_j}u_{0j} - \frac{\delta_j + \beta'_j}{\beta_j}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,j)} + \frac{\gamma_j}{\beta_j}\right] +$$

$$+\frac{h_1}{2}f\left(0, y_j, u_{0j}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,j)}, \frac{\partial^2 u}{\partial y}\Big|_{(0,j)}\right) + R_j^{(2)} = \left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)} - \frac{1}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\Big|_{(0,j)} -$$

$$-\frac{\delta_j + \beta_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,j)} - \frac{\delta'_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)u_{0j} + \frac{\gamma'_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right) +$$

$$+\frac{h_1}{2}f\left(0, y_j, u_j, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,j)}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,j)}\right) + R_j^{(2)} = \left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)} - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j}D_{h_1h_2xy}[u_{0j}] -$$

$$-\frac{\delta_j + \beta'_j}{\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)D_{h_2y}[u_{0j}] - \frac{\delta'_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)u_{0j} + \frac{\gamma'_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right) +$$

$$+\frac{h_1}{2}f\left(, y_j, u_{0j}, D_{h_1x}[u_{0j}], D_{h_2y}[u_{0j}]\right) + \overline{R}_j^{(2)},$$

где

$$\overline{R}_j^{(2)} = R_j^{(2)} - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{4\beta_j}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}h_1 - \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}h_2\right] - \frac{\delta_j + \beta'_j}{4\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right)h_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{\left(0, \eta_j^{(2)}\right)} +$$

$$+\frac{h_1^2}{4}f'_p\left(0, y_j, u_{0j}, p_j, q_j\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{\left(\xi_0^{(2)}, j\right)} + \frac{h_1 h_2^2}{24}f'_q\left(0, y_j, u_{0j}, p_j, q_j\right)\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{\left(0, \eta_j^{(2)}\right)} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{\left(0, \eta_j^{(3)}\right)}\right].$$

Тогда

$$\left|\bar{l}_{2h}^{(1)}u_{0j} - \left(l_3 u\right)_{(0,j)}\right| \le \left|\overline{R}_j^{(2)}\right|.$$

Отсюда следует (37).

Наконец, мы докажем, что

$$\left|\bar{l}_{3h}^{(1)}u_{0j} - \left(l_3 u\right)_{(0,j)}\right| \le C^{(2)}h_2^2, \qquad (39)$$

где

$$C^{(3)} = \left(\frac{|w^2 + \beta|}{6} + \frac{|w + \beta|\left(w + 1\right)}{2|\beta|} + \frac{h_1 M}{12}\right)M_3 + \left(\frac{|w + \beta\|\delta + \beta'|}{4|\beta|} + \frac{w^2 M}{4}\right)M_2,$$

$$\bar{l}_{3h}^{(1)}u_{0j} \equiv l_{3h}^{(1)}u_{0j} - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j}D_{h_1h_2x\bar{y}}[u_{0j}] - \frac{\delta_j}{\beta_j}\left(\beta_j h_2 + h_1\right)D_{h_2\bar{y}}[u_{0j}] - \frac{\delta'_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 + h_1\right)u_{0j} +$$

$$+\frac{\gamma'_j}{2\beta_j}\left(\beta_j h_2 - h_1\right) + \frac{h_1}{2}f\left(0, y_j, u_{0j}, D_{h_1x}[u_{0j}], D_{h_2y}[u_{0j}]\right), \quad D_{h_1h_2xy}[u_{0j}] = D_{h_1x}\left\{D_{h_2\bar{y}}[u_{0j}]\right\}.$$

Конечно

$$l_{3h}^{(1)}u_{0j} = \left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)} - \frac{h_1 + h_2\beta_j}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(0,j)} - \frac{h_1}{2}f\left(0, y_j, u_{0j}, \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,j)}, \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,j)}\right) + R_j^{(3)},$$

$$R_j^{(3)} = \frac{h_1^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{\left(\xi_0^{(1)}, j\right)} + \beta_j\frac{h_2^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{\left(0, \eta_j^{(1)}\right)}.$$

С учетом (38)

$$l_{3h}^{(1)}u_{0j} = \left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)} + \frac{h_1 + h_2\beta_j}{2\beta_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{h_1 + h_2\beta_j}{2}\frac{\delta'_j}{\beta_j}u_{0j} + \frac{h_1 + h_2\beta_j}{2}\cdot\frac{\delta_j + \beta'_j}{\beta_j}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,j)} -$$

$$-\frac{h_1+h_2\beta_j}{2}\cdot\frac{\gamma'_j}{\beta_j}-\frac{h_1}{2}f\left(0,y_j,u_{0j},\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,j)},\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,j)}\right)+R_j^{(3)}$$

,

$$\bar{l}_{3h}^{(1)}u_{0j}\equiv l_{3h}^{(1)}u_{0j}+\frac{\beta_j h_2+h_1}{2\beta_j}D_{h_1h_2x\bar{y}}[u_{0j}]+\frac{(\delta_j+\beta')}{2\beta_j}(\beta_j h_2+h_1)D_{h_2\bar{y}}[u_{0j}]+\frac{\delta'_j}{2\beta_j}(\beta_j h_2+h_1)u_{0j}-$$

$$-\frac{\gamma'_j}{2\beta_j}(\beta_j h_2+h_1)-\frac{h_1}{2}f\left(0,y_j,u_{0j},D_{h_1x}[u_{0j}],D_{h_2y}[u_{0j}]\right)+\bar{R}_j^{(3)},$$

где

$$\bar{R}_j^{(3)}=R_j^{(3)}+\frac{h_1+h_2\beta_j}{2\beta_j}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}h_1+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}h_2\right]+\frac{(h_1+h_2\beta_j)(\delta_j+\beta'_j)}{2\beta_j}h^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{(0,\eta_j^{(2)})}-$$

$$-\frac{h_1^2}{4}f'_p(0,y_j,u_{0j},p_j,q_j)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{(\xi_0^{(2)},j)}-\frac{h_1h_2^2}{24}f'_q(0,y_j,u_{0j},p_j,q_j)\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(3)})}+\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{(0,\eta_j^{(4)})}\right]$$

.

Следовательно,

$$\left|\bar{l}_{3h}^{(1)u_{0j}}-\left(l^{(1)}u\right)_{(0,j)}\right|\le\left|\bar{R}_j^{(3)}\right|,$$

что требовалось доказать.

Теперь сформулируем разностную задачу, соответствующую задаче (3)-(7). Требуется найти дискретную функцию $U_{ij}^{(k)}$ $(k=1,2,3)$, определенную в $\overline{\Omega}_h$ при выполнении свойств (11) - (13) и одного из следующих условий

$$\bar{l}_{kh}^{(1)}U_{0j}=\gamma_j\quad\left(j=\overline{1,N_2-1},\ k=1,2,3\right)\tag{40}$$

соответственно, когда выполняется одно из условий (30), (31) и (32). Решение разностной схемы (11) - (13) при одном из условий (40) примем за приближенное решение задачи (3) - (7) в точках $\overline{\Omega}_h$. Рассмотрим следующие линейные разностные операторы :

$$\Lambda_h^{(k)}[U_{ij}]=\begin{cases}\bar{L}_h[U_{ij}],\\ l_h[U_{N_1j}],\\ \bar{l}_{kh}^{(1)}[U_{0j}],\ (k=1,2,3)\end{cases}$$

где

$$\bar{L}_h[U_{ij}]\equiv\Delta_h[U_{ij}]+\xi_{ij}D_{h_1\overset{0}{x}}[U_{ij}]+\eta_{ij}D_{h_2\overset{0}{y}}[U_{ij}]-\mu_{ij}U_{ij}$$

,

$$\bar{l}_{1h}^{(1)}[U_{0j}]\equiv l_{1h}^{(1)}[U_{0j}]+\frac{h_1\left(U_{0j+1}+2U_{0j}+U_{0j-1}\right)}{2h_2^2}-\frac{h_1}{2}\left[\xi_{0j}D_{h_1x}[U_{0j}]+\eta_{0j}D_{h_2\overset{0}{y}}[U_{0j}]-\mu_{0j}U_{0j}\right]$$

,

$$\bar{l}_{2h}^{(1)}[U_{0j}]\equiv l_{2h}^{(1)}[U_{0j}]+\frac{\beta_jh_2-h_1}{2\beta_j}D_{h_1h_2xy}[U_{0j}]+\frac{\delta_j}{\beta_j}(\beta_jh_2-h_1)D_{h_2y}[U_{0j}]+\frac{\delta'_j}{2\beta_j}(\beta_jh_2-h_1)U_{0j}-$$

$$-\frac{h_1}{2}\left[\xi_{0j}D_{h_1x}[U_{0j}]+\eta_{0j}D_{h_2y}[U_{0j}]-\mu_{0j}U_{0j}\right],$$

$$\bar{l}_{3h}^{(1)}[U_{0j}]\equiv l_{3h}^{(1)}[U_{0j}]-\frac{\beta_jh_2-h_1}{2\beta_j}D_{h_1h_2xy}[U_{0j}]-\frac{\delta_j}{\beta_j}(\beta_jh_2+h_1)D_{h_2y}[U_{0j}]+\frac{\delta'_j}{2\beta_j}(\beta_jh_2+h_1)U_{0j}+$$

$$+\frac{h_1}{2}\left[\xi_{0j}D_{h_1x}[U_{0j}]+\eta_{0j}D_{h_2y}[U_{0j}]-\mu_{0j}U_{0j}\right].$$

Предположим, что если (30) выполнено, то

$$Mh_2<2\left(1-\sup|\beta(x)|\right),\tag{41}$$

а если выполняются (31), (32), то

$$\overline{M}h_2<1,\tag{42}$$

где

$$\overline{M}=\max\left\{\frac{M}{1+\left(\sup|\beta|\right)^{-1}},\ \frac{M+\sup\left(\dfrac{|\beta|+1}{|\beta|}|\beta'+\delta|\right)}{\inf|\beta|+\left(\sup|\beta|\right)^{-1}}\right\}$$

.

Лемма 2. Пусть функция $V\neq const$ определенна в $\overline{\Omega}_h$, удовлетворяющая неравенству $\Lambda_h^{(k)}[V_{ij}]\ge0$ $\left(\Lambda_h^{(k)}[V_{ij}]\le0\right)$ $k=1,2,3$. Тогда V может принимать наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение только в точках σ*h*.

Доказательство. Очевидно, что

$$\bar{l}_{1h}^{(1)}[U_{ij}]\equiv A_{1j}^{(1)}U_{ij}+A_{2j}^{(1)}U_{0j-1}+A_{3j}^{(1)}U_{0j+1}-A_{0j}^{(1)}U_{0j}$$

,

$$\bar{l}^{(1)}_{2h}[U_{ij}] \equiv A^{(2)}_{1j}U_{ij} + A^{(2)}_{2j}U_{0\,j-1} + A^{(2)}_{3j}U_{0\,j+1} - A^{(2)}_{0j}U_{0\,j}$$

,

$$\bar{l}^{(1)}_{3h}[U_{ij}] \equiv A^{(3)}_{1j}U_{ij} + A^{(3)}_{2j}U_{0\,j-1} + A^{(3)}_{3j}U_{0\,j+1} - A^{(3)}_{0j}U_{0\,j}$$

,

где

$$A^{(1)}_{0j} = \frac{h_1}{h_2^2} + \frac{1}{h_1} - \delta_j + \frac{\xi_j}{2} + \frac{h_1}{2}\mu_j, \quad A^{(1)}_{1j} = \frac{1}{h_1}\left(1 - \frac{h_1}{2}\xi_j\right)$$

,

$$A^{(1)}_{2j} = \frac{1}{2h_2}\left(\frac{h_1}{h_2} - \beta_j - \frac{h_1}{2}\eta_j\right), \quad A^{(1)}_{3j} = \frac{1}{2h_2}\left(\frac{h_1}{h_2} + \beta_j + \frac{h_1}{2}\eta_j\right)$$

,

$$A^{(2)}_{0j} = \beta_j\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) - \delta_j - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j h_2 h_1} + \frac{\delta_j}{h_2\beta_j}(\beta_j h_2 - h_1) - \frac{\delta'_j}{2\beta_j}(\beta_j h_2 - h_1) - \frac{\xi_j}{2} - \frac{h_1\eta_j}{2h_2} - \frac{h_1}{2}\mu_j$$

,

$$A^{(2)}_{1j} = \frac{\beta_j}{h_1} - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j h_2 h_1} - \frac{\xi_j}{2}, \quad A^{(2)}_{2j} = \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j h_2 h_1},$$

$$A^{(2)}_{3j} = \frac{\beta_j}{h_2} - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j h_2 h_1} + \frac{\delta_j}{h_2\beta_j}(\beta_j h_2 - h_1) - \frac{h_1\eta_j}{2h_2},$$

$$A^{(3)}_{0j} = \frac{1}{h_1} - \frac{\beta_j}{h_2} - \delta_j - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j h_2 h_1} + \frac{\delta_j}{h_2\beta_j}(\beta_j h_2 + h_1) + \frac{\delta'_j}{2\beta_j}(\beta_j h_2 + h_1) + \frac{\xi_j}{2} - \frac{h_1\eta_j}{2h_2} + \frac{h_1}{2}\mu_j$$

$$A^{(3)}_{1j} = \frac{1}{h_1} - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j h_2 h_1} + \frac{\xi_j}{2}, \quad A^{(3)}_{2j} = -\frac{\beta_j}{h_2} - \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j h_2 h_1} + \frac{\delta_j}{h_2\beta_j}(\beta_j h_2 + h_1) - \frac{h_1\eta_j}{2h_2}$$

$$, \quad A^{(3)}_{3j} = \frac{\beta_j h_2 - h_1}{2\beta_j h_2 h_1}.$$

Все эти коэффициенты положительны и удовлетворяют следующим условиям:

$$A^{(1)}_{0j} - A^{(1)}_{1j} - A^{(1)}_{2j} - A^{(1)}_{3j} = -\delta_j + \frac{h_1}{2}\mu_j \geq 0,$$

$$A^{(2)}_{0j} - A^{(2)}_{1j} - A^{(2)}_{2j} - A^{(2)}_{3j} = -\delta_j - \frac{h_1}{2}\mu_j - \frac{\delta'_j}{2\beta_j}(\beta_j h_2 - h_1) \geq 0$$

,

$$A^{(3)}_{0j} - A^{(3)}_{1j} - A^{(3)}_{2j} - A^{(3)}_{3j} = -\delta_j + \frac{\delta'_j}{2\beta_j}(\beta_j h_2 + h_1) + \frac{h_1}{2}\mu_j \geq 0$$

.

Учитывая эти свойства коэффициентов, применяя лемму 1, получаем лемму 2.

Следствие. Из леммы 2 следует, что решение (11)–(13) (40) единственно.

Теорема 2. Пусть *u* точное решение задачи (3)-(7) ограничивает четвертые производные и продолжается в третьей производной $\overline{\Omega}$. Тогда ошибка $\varepsilon_{ij} = u_{ij} - U_{ij}$, где U_{ij} - приближенное решение (11)-(13), (40), оценка $\varepsilon = O(h_2)$.

Доказательство. С помощью формулы Тейлора для ошибки $\varepsilon_{ij} = u_{ij} - U_{ij}$ имеем:

$$\begin{cases} \bar{L}_h[\varepsilon_{ij}] = O(h^2) & \text{in } \Omega_h \\ l_h[\varepsilon_{N_1 j}] = O(h^2) & \text{in } \Gamma_h^4 \\ \varepsilon_{ij} = 0, & \text{in } \sigma_h \\ \bar{l}^{(1)}_{kh}[\varepsilon_{0j}] = O(h^2), & \text{in } \Gamma_h^2,\ k = 1,2,3. \end{cases} \qquad (43)$$

Как и при доказательстве теоремы 1, представим решение системы (43) в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^1_{ij} + \varepsilon^2_{ij},$$

где

$$\begin{cases} \bar{L}_h[\varepsilon^1_{ij}] = O(h^2) & в\ \Omega_h \\ l_h[\varepsilon^1_{N_1 j}] = 0 & в\ \Gamma_h^4 \\ \varepsilon^1_{ij} = 0, & в\ \sigma_h \\ \bar{l}^{(1)}_{kh}[\varepsilon^1_{0j}] = O(h^2), & в\ \Gamma_h^2,\ k = 1,2,3. \end{cases} \qquad (44)$$

$$\begin{cases} \bar{L}_h[\varepsilon^2_{ij}] = 0 & в\ \Omega_h \\ l_h[\varepsilon^2_{N_1 j}] = -l_h[\varepsilon^1_{N_1 j}] + O(h^2) & в\ \Gamma_h^4 \\ \varepsilon^2_{ij} = 0, & в\ \sigma_h \\ \bar{l}^{(1)}_{kh}[\varepsilon^2_{0j}] = 0, & в\ \Gamma_h^2,\ k = 1,2,3. \end{cases} \qquad (45)$$

Оценка $\max\limits_{\overline{\Omega}_h} |\varepsilon^1_h| \leq c_7 h^2$ для системы решений (44) получается на основании леммы 2, благодаря схеме доказательства теоремы 1 мажорантной функцией

$g(x,y)=\dfrac{e^{\nu_0 a}-e^{\nu_0 x}}{k}$, а параметры k и ν_0 выбраны следующим образом:

$$k=\mu_0\nu_0,\;\; \mu_0=\min\{\alpha^0, M\beta^0\},\;\; \alpha^0=\begin{cases}\sup|\beta| & \text{если } |\beta|<1\\ \dfrac{1-\theta}{2} & \text{если } |\beta|\geq 1\end{cases}$$

$$\beta^0=\begin{cases}\sup|\beta| & \text{если } |\beta|<1\\ 1-\theta & \text{если } |\beta|\geq 1\end{cases}$$

$$\nu_0=\frac{2M}{\overline{\delta}}\operatorname{arcth}\left(\frac{2\overline{\delta}-\overline{\delta}^2}{2}\right),$$

$$\overline{\delta}=\begin{cases}1-\sup|\beta| & \text{если } |\beta|<1\\ \theta & \text{если } |\beta|\geq 1.\end{cases}$$

Оценка $\max\limits_{\overline{\Omega}_h}|\varepsilon_h^2|\leq c_8 h^2$ для решений системы (45) получается так же, как и оценка решения системы (22) при доказательстве теоремы 1.

Литературы:

1. Савандер В.И, Увакин М.А. Физическая теория ядерных реакторов. Москва 2008.
2. https://docs.yandex.ru/docs/viewtm=1643688100
3. А. С. Касимов Б. Х. Мухаммадиев Исследование размножающих свойств ячеек ВВЭР.
4. https://ijiemr.org/public/uploads/paper/734821638525349.pdf