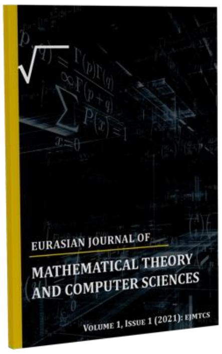
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 7.906 www.in-academy.uz



ON DEFINITIONS AND METHODS OF THE THEORY OF SPACES OF GENERALIZED DERIVATIVES

Dauzhanov Ainazar Shynnazarovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis of Karakalpak State University named after. Berdakha, Nukus E-mail:aynazard@mail.ru
Omarov Turar Mukhiyatdinovich
Assistant Lecturer, Department of Mathematical Analysis, Karakalpak State University. Berdakha, Nukus turaromarov400@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.12792241

ARTICLE INFO
Received: 18th July 2024
Accepted: 21th July 2024
Online: 22th July 2024
KEYWORDS
Functional, basic functions, generalized functions, generalized derivative.

ABSTRACT
The paper presents the basic concepts of the theory of generalized functions, definitions and properties of mathematical objects used in these areas. Based on the results and methods of the generalized derivative, examples of finding derivatives of discontinuous functions are shown.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯХ И МЕТОДАХ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЁННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Даужанов Аиназар Шынназарович
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета им. Бердаха, г. Нукус E-mail:aynazard@mail.ru
Омаров Турар Мухиятдинович
Ассистент преподаватель кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета им. Бердаха, г. Нукус turaromarov400@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.12792241

ARTICLE INFO
Received: 18th July 2024
Accepted: 21th July 2024
Online: 22th July 2024
KEYWORDS
Функционал, основные функции, обобщенные функции, обобщённая производная.

ABSTRACT
В работе приведены основные понятия теории обобщённых функций, определения и свойства математических объектов, используемых в этих областях. На основании результатов и методов обобщённой производной показаны примеры нахождения производных разрывных функций.

ВВЕДЕНИЕ. К числу наиболее часто используемых математических операций принадлежит вычисление производных функций $f(x)$. Большинство задач уравнений математической и теоретической физики решается при помощи методов, связанных с так называемыми интегрируемыми функциями и обобщёнными производными. Для работы с такими функциями требуется специальная техника – математический аппарат обобщённых функций. Некоторые из таких методов основаны на введении понятия обобщённых производных, позволяющих дифференцировать разрывные функции и производить другие операции, невозможные в классическом анализе [4]. Обобщая различных понятий и методов математического анализа и теории дифференциальных уравнений, обобщённые функции, находят широкое применения во многих современных направлениях математики и физики.

В данной работе мы используем понятие обобщённой производной как элемента обобщённых функций, что позволяет применять многие фундаментальные понятия стандартного математического анализа.

ИЗЛОЖЕНИЕ ОСНОВНОГО МАТЕРИАЛА. Известно, что производная дифференцируемой функции в заданной точке x определяется формулой

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.1)$$

Ниже приводим некоторые теоретические сведения. Все функции в данной работе предполагается принимающими действительные значения, областями задания рассматриваемых функций являются числовые множества.

1. Пусть $C(G)$ класс непрерывных определенных в области G (открытый интервал числовой оси) функций $\varphi : G \to R$. Если $m-$целое неотрицательное число, то символ $C^m(G)$ означает множество всех функций, определённых по крайней мере на G, у которых существуют на G непрерывные производные до порядка m включительно. Для каждой функции $\varphi : G \to R$ определим её носитель как $supp\varphi = \overline{\{x \in R : \varphi(x) \neq 0\}}$. Каждая функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема $(\varphi \in C^\infty(R))$ и финитна, т.е. все они обращаются в нуль вне конечного отрезка $[a,b]$, причём границы отрезка зависят от $\varphi(x)$.

Через $C_0^m(G)$ обозначается множество финитных в G функций класса $C^m(G)$, при $m = 0$ просто пишем $C_0(G)$.

Для $1 \le p < \infty$ будем обозначать через $f \in L_{p,loc}$ локально-суммируемую функцию и выберем неотрицательное число m, отрезок $[a,b]$ и множество функций $\varphi \in C_0^m[a,b]$ (или $\varphi \in D = C_0^\infty$).

Определение 1. Всякая непрерывная финитная функция $\varphi(x) \in C_0^m[a,b]$ называется основной, а совокупность основных функций называется пространством основных функций и обозначается $D = C_0^m[a,b]$ или $D = C_0^\infty[a,b]$.

Таким образом, $D = C_0^\infty -$ множество основных, бесконечно дифференцируемых, обращающихся в нуль вместе со всеми своими производными (финитных) функций.

Определение 2. Будем говорить, что на пространстве D задан функционал, если указано правило, по которому каждой функции $\varphi \in D$ ставится в соответствие определенное число (f,φ).

Определение 3. Линейный непрерывный функционал f на D называется обобщённой функцией, если он непрерывен на D, т.е. $(f,\varphi_m)\to 0$ для всякой последовательности $\varphi_m \to 0$ в D.

Множество всех обобщённых, бесконечно дифференцируемых и финитных функций обозначается через $D^{/}$.

Пример 1. Определение функционала интегралом или связь между непрерывными и обобщёнными функциями. Пусть функция $f(x)-$ обычная в смысле определения непрерывная функция, заданная на отрезке $[a,b]$. Его можно считать также обобщённой функцией порядка $m=0$, если использовать следующее правило действия f на основные функции $\varphi \in D = C_0[a,b]$:

$$(f,\varphi)=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad (1.2)$$

так как интеграл от непрерывной функции по отрезку всегда определён, то равенство (1.2) переводит каждую функцию $\varphi \in C_0[a,b]$ в определенное число (f,φ), т.е. функционал. Такая обобщённая функция называется регулярной.

Обобщённая функция, не являющаяся регулярной (т.е., локально интегрируемой), называется сингулярной.

Пример 2. Функция Дирака $\delta(x)\notin L_{1,loc} -$ это пример сингулярной обобщённой функции:

$$\int_R \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \forall\varphi \in D(R).$$

А функция Хевисайда $\theta(x)$ вводится как регулярный функционал:

$$\theta(x)=\begin{cases}1, \ x>0,\\ 0, \ x\le 0.\end{cases}$$

2. Если заданная функция $f(x)$ для любого $\varphi(x)\in D(a,b)$ удовлетворяет соотношению $f(x)\varphi(x)\in L_p(a,b)\ (1\le p<\infty)$, то пишут $f\in L_{p,loc}(a,b)$. Поэтому

$$L_{p,loc}(a,b)=\{\ f: f\varphi \in L_p(a,b), \forall\varphi \in D(a,b)\ \}.$$

В частности, классу $L_{p,loc}(a,b)$ принадлежит любая непрерывная или имеющая точки разрыва 1-го рода в интервале (a,b) функция. Например, функция

$$sign x = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, x \neq 0, \\ 1 \quad , x = 0. \end{cases}$$

Определение 4. Если $f \in L_{p,loc}(a,b)$ и для любого $\varphi \in D(a,b)$ справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)\varphi^{(n)}(x)dx = (-1)^n \int_a^b g(x)\varphi(x)dx, \; n = 1,2,... \tag{1.3}$$

то $g(x)$ называется обобщённой производной n- го порядка функции $f(x)$ в промежутке (a,b) и обозначается $g(x) = f^{(n)}(x)$.

Определение 5. Для любой обобщённой функции $f \in D^{/}(G)$ положим

$$\forall \varphi \in D(=C_0^{\infty}(G)): \; (D^m f, \varphi) = (-1)^m (f, D^m \varphi), \; m = 1,2,... . \tag{1.4}$$

Если $g(x) \in C^{\infty}(G)$, то полагается $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(G): \; (gf, \varphi) = (f, g\varphi)$.

Как мы видим определение обобщённой производной расширяет понятия дифференцирования и даёт возможность находить производные у некоторых функций, которые не являются дифференцируемыми в обычном смысле.

Пример 3. Сингулярная функция имеет производную, обращающуюся в бесконечность на счетном множестве точек. Конечнозначными сингулярными функциями являются функция $sign\, x$ и $|x|$.

$|x| = x\, sign\, x$ не имеет (обычной) производной в нуле. После введения производной в обобщённом смысле, первой производной $|x|$ будет функция сигнум: $(|x|)' = sign\, x$, для второй производной получаем дельта-функцию Дирака: $(|x|)'' = 2\delta(x)$.

Отметим основные свойства обобщённых производных.

Свойство 1. Если функция f в каждой точке $[a,b]$ имеет непрерывную обобщённую производную $f^{(n)}(x)$, то её обобщённая производная n- го порядка $g(x)$ в (a,b) совпадает с $f^{(n)}(x)$.

Свойство 2. Функция, не дифференцируемая в смысле равенства (1.1) может иметь обобщённую производную.

Свойство 3. Понятие обобщённой производной определяется одновременно для всякого интервала.

Свойство 4. Для того, чтобы функция f имела обобщённую производную n- го порядка, необязательно, чтобы она имела обобщённые производные ниже n- го порядка.

Многие свойства обобщённой производной являются аналогами свойств обычной производной, но не все.

Утверждение (связь обычной и обобщённой производных (см. [1-3, 6]). Пусть $f(x) \in C^1[a, x_0] \cap C^1[x_0, b]$.

Тогда производная функции $f(x)$ в смысле обобщённых функций равна сумме производной в обычном смысле и произведения скачка на обобщённую функцию δ, сосредоточенной в точке разрыва:

$$Df = \frac{df}{dx} + [\,f\,]_{x_0}\,\delta(x - x_0), \qquad (1.5)$$

где $Df -$ производная в смысле обобщённых функций, $\frac{df}{dx} -$ классическаяпроизводная (определённая всюду, кроме точки $x = x_0$):

$$\frac{df}{dx} = \begin{cases} f'(x), \ x \neq x_0, \\ \textit{произвольное}, \ x = x_0, \end{cases}$$

заметим, что $f \notin C^1(R)$, в точке x_0 функция имеет разрыв 1-го рода и величина скачка в точке разрыва x_0: $[\,f\,]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ и $\delta(x - x_0) -$ дельта - функция со сдвигом аргумента на x_0.

Обобщённую функцию, соответствующую функции $\frac{df}{dx}$ по формуле (1.5), называют регулярной частью обобщённой производной $Df(x)$.

В частности, если функция непрерывна, то скачок в точке x_0 равна нулю и производная в смысле теории обобщённых функций совпадает с производной в обычном смысле.

Пример 4. Правило отыскания производной в смысле обобщённых функций. Найдем производные порядка 1 и 2 разрывной функции Хевисайда, как регулярная обобщённая функция, если $f(x) = (x-1)\theta(x^2 - x)$, где $\theta(x) = 0$ при $x < 0$; $\theta(x) = 1$ при $x > 0$.

Решение. Пусть 1) $f(x) \in D^{/}, \, g(x) \in C^{\infty}$, тогда $(gf)' = g'f + gf'$; 2) $f(x) \in C^1[-\infty, a] \cap C^1[a, +\infty], \, a \in R; \, f(a \pm 0) -$ предельные значения конечны; 3) обычная производная $\{f'(x)\}$ является регулярной обобщённой функцией. Тогда согласно формуле производной в смысле обобщённых функций (1.4) и используя формулу дифференцирования сложного аргумента имеем:

$$Df = \theta(x^2 - x) + (x-1)(2x-1)\theta'(x^2 - x).$$

Так как производная функции Хевисайда равна $\delta -$ функции, поэтому

$$\theta'(x^2 - x) = \delta(x^2 - x).$$

Теперь воспользуемся следующей формулой упрощения сложного аргумента: если функция $f(x)$ имеет простые корни x_i, где $f(x_i) = 0,\ f'(x_i) \neq 0$, тогда

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i),$$

где $f(x) = x^2 - x = x(x-1), x_1 = 0; x_2 = 1; f'(x) = 2x - 1$ и мы приходим к равенству

$$\delta(x^2 - x) = \sum_{i=1,2} \frac{1}{|2x_i - 1|}\delta(x - x_i) = \delta(x) + \delta(x-1).$$

Отсюда следует, что $\theta'(x^2 - x) = \delta(x) + \delta(x-1)$. Следовательно,

$$Df = \theta(x^2 - x) + (2x^2 - 3x + 1)(\delta(x) + \delta(x-1)) = \theta(x^2 - x) + \delta(x) +$$
$$+ 2\delta(x-1) - 3\delta(x-1) + \delta(x-1) = \theta(x^2 - x) + \delta(x).$$

Здесь применено правило умножения $\delta -$функции на бесконечно дифференцируемую функцию, которое по определению равносильно умножению $\delta -$ функции на число $f(0): f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$.

Производная 2-го порядка равна:

$$D^2 f(x) = \left(\theta(x^2 - x) + \delta(x)\right)' = (2x-1)\theta'(x^2 - x) + \delta'(x) =$$
$$= (2x-1)(\delta(x) + \delta(x-1)) + \delta'(x) = 2\delta(x-1) - \delta(x) -$$
$$- \delta(x-1) + \delta'(x) = \delta(x-1) - \delta(x) + \delta'(x).$$

Следовательно, $D^2 f = \delta(x-1) - \delta(x) + \delta'(x)$.

Как мы видели, любая обобщённая функция имеет производную. Отсюда следует, что и любая локально интегрируемая функция имеет в смысле определения 5 производную.

Из формулы (1.4) следует, что производная в смысле стандартного математического анализа непрерывно дифференцируемой функции, рассматриваемая как функционал над пространством $D = C_0^\infty$, совпадает с её производной в смысле теории обобщённых функций.

References:

1. Александров В.А. Обобщённые функции. Новосиб. гос. ун-т, 2005.

2. Бельхеева Р.К. Обобщённые функции в примерах и задачах. Новосиб. гос. ун-т, 2014.
3. 3. Бутузов В.Ф., Бутузова М.В. Ряды и интеграл Фурье. Обобщённые функции. М., 2017.
4. В.П. Паламодов В.П. Обобщённые функции и гармонический анализ// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, Т.72, М.: ВИНИТИ, 1991, 5-134
5. Даужанов А.Ш. Методические изложения элементов теории обобщённых функций// «ILM SARCHASHMALARI». Научно-методический журнал Ургенчского гос. ун-та. 2020. №10. С. 11-25.
6. Даужанов А.Ш. и др. Методы теории обобщённых функций. Нукус «ILIMPAZ», 2021.