EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.3 | SJIF = 5.916 www.in-academy.uz

ФУНКЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ТЕЛА С ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ НАПРЯЖЕНИЙ

Аблокулов Шерзоджон Зокир угли
Докторант
Ташкентского химико-технологического института
https://doi.org/10.5281/zenodo.7124789

ARTICLE INFO

Received: 24th September 2022
Accepted:26th September 2022
Online: 29th September 2022

KEY WORDS

тел вращения, уравнения равновесия, напряжения, деформация, модуль упругости.

ABSTRACT

Вводитея новая функция напряжений для тел вращения при осесимметричном распределении напряжений, при этом используются уравнения равновесия и совместности, запи¬санные через деформации. Эта функция выделяет тот класс напряженных состояний, при котором осевые нормальные и касательные напряжения не зависят от коэффициента Пуассона

Решение задачи теории упругости для тел вращения с осесимметричними граничными условиями сводится к решению системы диф¬ференциальных уравнений, состоящей из двух уравнений равновесия [1,2]

$$\frac{\partial(r\sigma_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial z}-\sigma_\theta=0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(r\tau_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial(r\sigma_z)}{\partial z}=0 \quad (2)$$

и четырех уравнений неразрывности деформаций

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial r}\right)-r\frac{\partial e_{rr}}{\partial r}=0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial e_{\theta\theta}}{\partial z}\right)-\frac{\partial e_{rr}}{\partial z}=0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 (r e_{\theta\theta})}{\partial z^2}-\frac{\partial e_{rz}}{\partial z}+\frac{\partial e_{zz}}{\partial r}=0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 e_{rr}}{\partial z^2} \quad \frac{\partial^2 e_{rz}}{\partial r\partial z}+\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial r^2}=0 \quad (6)$$

при выполнении заданных граничных условий.

В приведенных формулах σ_r, σ_θ и σ_z соответственно радиаль¬ное , тангенциальное и осевое нормальные напряжения; τ_{rz} - касательное напряжения; e_{rr}, $e_{\theta\theta}$, e_{zz}- компоненты деформации соответственно в радиальном, тангенциальном и осе вом направлениях, e_{rz}- сдвиг в плоскости rz [3,4].

Используя соотношения между деформациями и напряжениями

$$\sigma_r=\lambda e+2Ge_{rr}$$
$$\sigma_\theta=\lambda e+2Ge_{\theta\theta}$$
$$\sigma_z=\lambda e+2Ge_{zz}$$
$$\tau_{rz}=Ge_{rz}$$

где $e=e_{rr}+e_{\theta\theta}+e_{zz}$, $\lambda=\frac{\mu E}{(1+\mu)(1+2\mu)}$, $G=\frac{E}{2(1+\mu)}$

E- модуль упругости, μ - коэффициент Пуассона, для дальнейшего удобнее записать (I) и (2) через деформации [5,6]

$$\frac{\partial(re_{rr})}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial(re_{rz})}{\partial z}-e_{\theta\theta}+\frac{\mu r}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial r}=0 \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial(re_{rz})}{\partial r}+\frac{\partial(re_{zz})}{\partial z}+\frac{\mu r}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial z}=0 \quad (8)$$

Таким образом, осесимметричная задача сводится к решению системы из шести дифференциальных уравнений (3,8) относительно четырех неизвестных функций $e_{rr}, e_{\theta\theta}, e_{zz}$и e_{rz} зависящих от r и z

Если деформации выразить через непрерывную четырежды диф-ференцируемую по r и по z функцию φ следующим образом

$e_{rr}=\frac{1}{2G}\left((1-\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)-\mu\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right)$,

$e_{\theta\theta}=\frac{1}{2G}\left((1-\mu)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}-\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right)$,

$e_{zz}=\frac{1}{2G}\left((1-\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right)-\frac{\mu}{r}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial r\partial z^2}\right)$,

$e_{rz}=-\frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$,

т о непосредственной подстановкой нетрудно проверить, что урав-ненияравновесия (7) и (8) и совместности (3) и (4) будут удов¬летворены тождественно; (5) и (6) превратятся соответственно в уравнения [7,8]

$U^2(\varphi)=0$ (9)

$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}U^2(\varphi)\right)=0$ (10)

г д е

$U^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)$ (11)

С л е д о в а т е л ь н о, если функция φ есть решение уравнения (9), то выраженные через нее в вышеприведенной форме деформации удовлет¬воряют системе (3:8).

Напряжения запишутся через функцию φ в следующем виде

$\sigma_r=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)-(1-\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}+\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$,

$\sigma_\theta=\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)+(1-\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$,

$\sigma_z=\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$,

$\tau_{rz}=-\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$,

Компоненты деформации и проекции перемещения w и u на z и r связаны соотношениями

$e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}$, $e_{\theta\theta}=\frac{u}{r}$,

$e_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}$,

С л е д о в а т е л ь н о

$u=\frac{1}{2G}\left((1-\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}-\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right)$

П р о е к ц и й перемещения W на ось Z не может быть выражена через производные от функции φ , но ее производные $\frac{\partial w}{\partial z}$ и $\frac{\partial w}{\partial r}$ могут быть записаны следующим образом

$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{2G}\left((1-\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right)-\mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right)$,

$\frac{\partial w}{\partial r}=-\frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial z}\left((2-\mu)\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)\right)+(1-\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$

Н е р е д к о, вместо четырех уравнений неразрывности деформаций (3:6) применяется система из двух уравнений, одно из которых [9,10]

$e_{rr}=-\frac{\partial}{\partial r}(re_{\theta\theta})=0$

и вторым выбирается либо уравнение (5), либо (6).

П р и в е д е н н ы й в статье вывод функций напряжений φ показывает что правельным будет полагать в качестве второго уравнения толь¬ко уравнение (5).

Н а п р и м е р, если за второе уравнение оовместности принять урав нениа (6), то положив $\varphi=rf(z)$, где f(z) произвольная функция от z , такая, что $\frac{d^4 f}{dz^4}\neq 0$ можно удовлетворить двум уравнениям равновесия и двум уравнениям совместности выбранной системы, но при этом не будет удовлетворяться не принятое во внимание уравне¬ние (5).

Другой полезный для приложений класс частных решений нетруд¬но получить, если записать уравнение (9) в пространственных полярних координатах R и Ψ , где

$R=\sqrt{r^2+z^2}, \psi=arctg\, r/z, 0\le\psi\le\pi, 0\le R<\infty$

В этом случае уравнение (9) примет вид

$V^2(\varphi)=0$ (12)

где $V=\partial^2/(\partial R^2)-ctg\psi/R^2\, \partial/\partial\psi+1/R^2\, \partial^2/(\partial\psi^2)$

Сначала находятся те решения уравнения (12), которые одновременно являются решениями уравнения

$V(\varphi)=0$ (13)

Методом Фурье, положив $\varphi=F(R)\Psi(\psi)$ и константу при разделе¬нии переменных равной п(n+1) (п =1,2,3...), нетрудно полу¬чить два обыкновенных дифференциальных уравнения для F и Ψ :

$R^2 F''-n(n+1)F=0$,

$\Psi''-\Psi' ctg\psi+n(n+1)\Psi'=0$

Общее решение первого уравнения

$F=D_1 R^{(n+1)}+D_2 R^{(-n)}$

Общее решение второго - выражается через полинош Лежандра n-ой степени Рп и шаровые функции Лежандра второго рода п-го порядка Q_n следующей форме

$\Psi=C_1 (P_{(n+1)}(\cos\psi)-P_{(n-1)}(\cos\psi))+C_2 (Q_{(n+1)}(\cos\psi)-(Q_{(n-1)}(\cos\psi))$

где $D_{(1,)}$ $D_{(2,)}$ $C_{(1,)}$ C_2- произвольные постоянные.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что частными решениями уравнения (12) будут также функции $R^2 F(R)\ \Psi(\psi$

Принимая во внимание, что $\cos\psi=z/\sqrt{r^2+z^2}$ и $R=\sqrt{r^2+z^2}$ нетрудно найденные частные решения записать в прежних переменных r и z

Введенная функция φ выделяет тот класс напряженных состояний, в котором осевые нормальные и касательные напряжения не за¬висят от коэффициента Пуассона.

Используя линейные комбинации указанных состояний можно получить напряженные состояния, даваемые в общем случае функцией

Лява, где коэффициент Пуассона входит явно в выражение для осевого нормального и касательного напряжений.

С другой стороны, комбинируя напряженные состояния для раз¬личных решений бигармонического уравнения, можно прийти к напря¬женным состояниям, которые получаются при использовании частных решений уравнений (9).

Ниже приводится пример, иллюстрирующий последнее замечание Частным решением уравнения (9) является функция

$CrJ_1(\lambda r)(e^{(-\lambda z)}+\lambda ze^{(-\lambda z)})$

Где $J_1(\lambda r)$ - функция Бесселя первого рода первого порядка,

λ - некоторый параметр, С - произвольная константа.

Применяя интегрирование по параметру, нетрудно получить но¬вое частное решение, которое принимается в данном примере за функцию напряжений φ

$$\phi = C\int_0^\infty \frac{rJ_1(\lambda r)e^{-\lambda z}\,d\lambda}{\lambda} = \frac{Cr^2}{R}$$

Напряжения для этой функции запишутся в следующем виде

$$\sigma_r = C\left(\frac{2(1-\mu)}{R^3} - \frac{15r^2 z^2}{R^7}\right),$$

$$\sigma_\theta = C\left(-\frac{(1-2\mu)}{R^3} + \frac{3(z^2+2\mu r^2)}{R^5}\right),$$

$$\sigma_z = C\left(-\frac{8}{R^3} + \frac{24r^2}{R^5} - \frac{15r^4}{R^7}\right),$$

$$\tau_{rz} = C\left(-\frac{12zr}{R^5} + \frac{15(zr)^3}{R^7}\right)$$

Полученные напряжения симметричны относительно плоскости $Z=0$ и обращаются в бесконечность при приближении к началу координат.

Чтобы выяснить характер сосредоточенных особенностей в точке (0,0), удобнее перейти к выражениям для нормального σ_R и касательного $\tau_{R\psi}$ напряжений в сферической системе координат

$$\sigma_R = \frac{2c}{R^3}\left((1-\mu)\sin^2\psi - 4\cos^2\psi + 2\mu\right),$$

$$\tau_{R\psi} = -\frac{2(1+\mu)c}{R^3}\sin\psi\cos\psi$$

Первые два слагаемых в квадратных скобках в выражении для σ_R в совокупности с выражением для $\tau_{R\psi}$ соответствуютизвестому в теории упругости решению при действии двух равных и прямо противоположных сил, приложенных в начале координат на малом расстоянии друг от друга, третье слагаемое соответствует цетру сжатия.

Следовательно, функция $\varphi = r^2/R$ определяет напряженное состояние, полученное при сложений напряжений от двух видов указанных особенностей.

References:

1. Rosenberg L.R.,Schmidt R.V.,Coldren L.A. Interior-surface acoustic waveguiding in capillaries / Applied Physics Letters. – 1974. – vol. 25, No. 6. – P. 324-326.

2.Safarov I.I., Teshayev M. H., Boltayev Z.I., Akhmedov M.Sh. Mathematical modeling of dynamic processes in a toroidal and cylindrical shell interacting with a liquid.Raleigh, North Carolina,USA: Open Sciense Publishing, 2018. 223 p.

3.Safarov I.I., Teshaev M.Kh.,Akhmedov M.S.Free Oscillations of a Toroidal Viscoelastic Shell with a Flowing Liquid. American Journal of Mechanics and Applications.2018;6(2):3749http://www.sciencepublishinggroup.com/j/ajmadoi:10.11648/j.ajma.20180602.11. ISSN: 2376-6115 (Print); ISSN: 2376-6131 (Online)

4.Сафаров И.И. , Умаров А.О.Воздействие продольных и поперечных волн на цилиндрические слои с жидкостью// Вестник пермского университета . Математика. Механика. Информатика2014 Вып.3(26). с. 69-75

5. Адамов А.А., Матвеенко В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н. Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003, 411с.

6. Fedorov A.Yu., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Numerical analysis of stresses in the vicinity of internal singular points in polymer composite materials. International Journal of Civil Engineering and Technology. Vol. 9, Iss. 8, 2018, Pp. 1062-1075.

7. Bykov A.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N., Shestakov A.P. Shock wave method for monitoring crack repair processes in reinforced concrete structures. Mechanics of Solids. Vol. 52, Iss. 4, 2017, Pp. 378-383.
8. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z. Use of linear heredity theory of viscoelasticity for dynamic analysis of earthen structures. Soil Mechanics and Foundation Engineering, 2013. Vol. 49, Iss. 6, Pp. 250-256.
9. Mirsaidov M.M., Sultanov T.Z., Rumi D.F. An assessment of dynamic behavior of the system "structure - Foundation" with account of wave removal of energy. Magazine of Civil Engineering. 39(4), Pp. 94-105.
10. Koltunov M.A., Mirsaidov M.M.,Troyanovskii I.E.Transient vibrations of axissymmetric viscoelastic shells. Polymer Mechanics Vol.14, Iss.2, Pp. 233-238.