



BIR O'LCHOVLI FILTRATSIYA TENGLAMALARINI LAPLAS ALMASHTIRISH YORDAMIDA YECHISH

Xushvaqтова E'zoxon Odil qizi¹, Aliyev Aktam Erkin o'g'li²

¹ Uchtepa tumanidagi 297-maktab Matematika fani o'qituvchisi

² O'z.R.F.A.M.T. O'rozboyev nomidagi Mexanika va Inshootlar seysmik
mustahkamligi instituti kichik ilmiy xodimi

Uchtepa tumanidagi 297-maktab Matematika fani o'qituvchisi
Tashkent, Uzbekistan

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7203176>

ARTICLE INFO

Received: 27th September 2022

Accepted: 08th October 2022

Online: 14th October 2022

KEY WORDS

Filtratsiya, g'ovak muhit, suyuqlik, uzluksizlik, empirik munosabatlar, fizik parametrlar, elementar hajm, uzluksiz yondashuv.

ABSTRACT

Neft qatlamini kompyuterda modellashtirishdan oldin tizimning matematik modeli bo'lishi kerak. Suyuqliklarning g'ovak muhitda harakatlanishi asosiy qonunlar bilan belgilanadi masalan ularning atmosferada, quvurlar va daryolarda harakatlari sodir bo'ladi. Amaliy nuqtai nazardan, ushbu asosiy qonunlarni to'g'ridan-to'g'ri g'ovak muhitdagi suyuqlik oqimi muammolariga tatbiq etishga urinish umuman imkonsiz. Buning o'rniga yarim empirik yondashuv qo'llaniladi, unda moment tenglamasi o'rniga Darsi qonuni qo'llaniladi.

Ushbu moment va energiya qonunlari massani saqlashga asoslangan, ular ko'plab kitoblarda, jumladan Biyord va boshqalar (1960), Shlixting (1968), Monin va Yaglom (1971) da batafsil muhokama qilingan. Empirik Darsi qonunining nazariy asoslarini Uiteyker (1966, 1969) ko'rib chiqqan. Bunday tadqiqotlar empirik munosabatlarning cheklanishlarini yaxshiroq tushunishga imkon beradi. Ko'rsatilgan nisbatlar bilan bir qatorda tizimdagi suyuqliklarning fizik parametrlari bog'liq o'zgaruvchilarning funksiyalari sifatida ma'lum bo'lishi kerak. Ushbu mavzuni chuqur o'rganish davomida katta amaliy ahamiyatga ega bo'lgan matematik modellar mavjudligini ko'rish mumkin. Ushbu modellarning tenglamalarini yechishning raqamli usullari mavjud. Biz aralashmagan suyuqliklarning izotermik bir, ikki va uch o'lchovli filtratsiyasi bilan cheklanamiz. Shu nuqtai nazardan, quyidagi bir o'lchovli va ko'p o'lchovli tizimlar qiziqish uyg'otadi: gaz, neft, suv, gaz — neft, gaz — suv, neft — suv, neft — suv — gaz.

G'ovak muhitda suyuqlik oqimining mexanikasini ko'rib chiqadigan dastlabki ikki kitob Masket (1937, 1949) tomonidan chop etildi. Masketning ushbu kitoblari tarixiy ahamiyatga ega bo'lib fanga katta hissa qo'shgan. Yer osti suvlari harakati nazariyasi kitobi SSSRda Polubarinovoy-Kochina tomonidan (1952) da chop etilgan bo'lib, unda analitik yechimga ruxsat beruvchi bir o'lchovli filtrlash vazifalari mavjud. G'ovak muhitda oqim fizikasi haqida umumiy ma'lumot Sheydegger (1974) tomonidan nashr etilgan. Tadqiqotchi mutaxassislar uchun mo'ljallangan ushbu kitobda yer osti kollektorlaridan neft qazib olish bilan bog'liq masalalar qisqacha muhokama qilinadi. Kollinz (1961) kitobida neft konlarini rivojlantirishning nazariy va amaliy jihatlari keltirilgan.



Ber (1972) g'ovak muhitdagi suyuqliklarning dinamikasi va statikasini to'liq qamrab oladi. Biroq, kitobda muhokama qilingan muammolarning aksariyati yer osti suvlari gidrologiyasiga bag'ishlangan. Gaz quduqlarini sinashda filtratsiya nazariyasidan foydalanish Albert tomonidan energiyani tejash bo'yicha kengashida nashr etilgan.

Bir o'lchamli filtrlash o'z o'qi yo'nalishi bo'yicha silindrsimon yadroda bitta suyuqlikni (bitta komponent yoki bir hil aralashmali) filtrlashni ko'rib chiqamiz. G'ovakli muhitning ko'rib chiqilgan elementar hajmidan biri bo'lishi kerak (Ber, 1972, 19-bet), ya'ni u teshik hajmi bilan taqqoslaganda yetarlicha katta va yadro kattaligiga nisbatan kichik bo'lishi kerak. G'ovakli muhitning asosiy fizik xususiyatlari elementar hajm bilan bog'liq bo'lishi mumkin.

Agar g'ovaklilik elementar hajmning qattiq matritsa egallamagan qismi sifatida aniqlansa, g'ovak kattaligiga mutanosib bo'lgan elementar hajm bo'lsa, g'ovaklik mavjud emas yoki bitta bo'ladi. Boshlang'ich hajmning kattalashishi bilan, g'ovaklilik vakillik qiymatiga yetmasdan oldin o'zgarib turadi. G'ovaklikning har qanday P nuqtadagi qiymati ushbu nuqtani o'z ichiga olgan elementar hajm uchun uning vakillik qiymatiga mos keladi. Boshqa fizik xususiyatlar xuddi shu tarzda g'ovak muhitdagi nuqtada aniqlanadi. Bu uzluksiz yondashuv bo'lib, unda haqiqiy g'ovakli muhit xayoliy uzluksizlik bilan almashtiriladi, uning har bir nuqtasi uchun fazoviy va vaqtinchalik koordinatalarning uzluksiz funksiyalari sifatida o'zgaruvchilar va parametrlarni aniqlash mumkin.

Masala. Quyidagi parabolik filtratsiya masalasini qaraylik:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0 \quad (1)$$

$$u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad x > 0 \quad (2)$$

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = u_0, \quad t > 0 \quad (3)$$

bu yerda (2) shart boshlang'ich, (3) shart esa chegaraviy shart.

Ushbu masalani ham Laplas usulida yechamiz, buning uchun

$$\bar{g}(x,p) = \int_0^{+\infty} u(x,t) e^{-pt} dt$$

Almashtirish bajaramiz, natijada (2) va (3) shartlarni inobatga olib quyidagi oddiy differensial tenglama va chegaraviy shartlarga ega bo'lamiz.

$$\frac{d^2 \bar{g}(x,p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2} \bar{g}(x,p) = 0 \quad (4)$$

$$\bar{g}(0,p) = 0, \quad \bar{g}(l,p) = \frac{u_0}{p} \quad (5)$$

(4) va (5) tenglamaning umumiy yechimini topamiz, bu yechim

$$\bar{g}(x,p) = A \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{p}}{a} x\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{p}}{a} x\right)$$



ko'rinishda bo'ladi. Chegaraviy shartlardan A va B o'zgarmas sonlarni topamiz, natijada

$A = 0, \frac{u_0}{p} = Bsh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)$ ekanligidan, (4) operator tenglamaning yechimini ko'rinishi bo'lgan

$$\bar{g}(x, p) = \frac{u_0}{p} \left\{ sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) \right\}^{-1} sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$$

tenglikni olamiz.

Endi asosiy masalaning yechimini olish uchun Riman Mellinning Formulasidan foydalanamiz:

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) \right\}^{-1} sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) e^{pt} \frac{dp}{p} \quad (6)$$

(6) integralni hisoblash uchun integral ostida turhan funksiyaning chegirmalarini hisoblaymiz, agar giperbolik sinusning nollari va nol nuqtani topamiz. Giperbolik sinusning nollari

$$sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) = 0, \frac{\sqrt{p}}{a}l = ik\pi, p_k = -\left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2$$

Barcha nollar oddiq qutb, shuning uchun chegirmalar haqidagi Koshi teoremasidan

$$u(x, t) = \sum_{(p_k)} \text{res } F(p) e^{pt}, F(p) = \frac{M(p)}{pN(p)} = \frac{1}{p} \left\{ sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right) \right\}^{-1} sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$$

$$\frac{M(p)}{pN(p)} \text{ funksiyanin asli quyidagiga teng } \frac{M(0)}{N(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} e^{p_k t}$$

$$\frac{M(0)}{N(0)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)}{sh\left(\frac{\sqrt{p}}{a}l\right)} = \frac{x}{l}, \quad \frac{M(p_k)}{p_k N'(p_k)} = -\frac{2ish(ik\pi x)}{k\pi ch(ik\pi x)}$$

Endi $\frac{2ish(ik\pi x)}{k\pi ch(ik\pi x)} = (-1)^k \frac{2}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)$ tenglikni inobatga olsak, oxirgi natija yaniy parabolic tenglamaning umumiy yechimini

$$u(x, t) = u_0 \left\{ \frac{x}{h} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right) \right\}$$

Laplas almashtirishi yordamida xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishga bag'ishlangan maqolada Laplas almashtirishi yordamida cheksiz oraliqda parabolik



tenglamalar yechib ko'rsatilgan va analitik yechim olingan. Ushbu maqolada bir nechta parabolik filtratsiya va diffuziya tenglamalarini Laplas usuli yordamida yechish usuli keltirilgan. Bunda asosiy olingan natjalarni analitik ko'rinishda olish mumkinligi keltirilgan.

References:

1. Tixonov A.N., Samarskiy A.A. Уравнения математической физики, Наука, М., 1977.- 736С
2. Shestakov V.M. Динамика подземных вод. Изд-во МГУ, 1973.-327С.
3. Polubarinova-Kochina P.Ya. Теория движения грунтовых вод. Наука М., 1977, -664 С.
4. Lavrentev M.A., Shabat B.V. Методы теории функции комплексного переменного. М., Наука М., 1973Ю -736 С.
5. Ditkin V.A. Prudnikov A.P. Интегральные преобразование и операционное исчисление. Физ.Мат.Лит. М., -524С.
6. L.S. Leybenzon Движение Природных Жидкостей И Газов В Пористой Среде. Огиз Гост.1947
7. С.Г.Михлин "Курс математической физики"-Москва. Наука,1968.
8. В.С.Владимиров, В.В.Жаринов "Уравнения математической физики"-Москва. ФИЗ-МАТ,2004.