



THE INNER AUTOMORPHISMS OF CENTRAL EXTENSIONS OF TYPE I FACTORS

A. B. Abdireymov

S. Aytmuratova

Karakalpak state university,

e-mail: aabdireymov1001@gmail.com;

sarbinazzz.elmuratovna@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17617654>

ARTICLE INFO

Received: 10th November 2025

Accepted: 14th November 2025

Online: 15th November 2025

KEYWORDS

Operator, automorphism,
algebra, integral, Fon Neyman
algebra.

ABSTRACT

This paper considers the automorphisms of central extensions of Type I algebras. It is proved that any automorphism that fixes the center and is continuous in the local measure topology is inner.

I-TUR MARKAZIY KENGAYTMALARINING ICHKI AVTOMORFIZMLARI

A. B. Abdireymov¹

S. Aytmuratova²

Qoraqalpoq davlat universiteti,

e-mail: aabdireymov1001@gmail.com; sarbinazzz.elmuratovna@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17617654>

ARTICLE INFO

Received: 10th November 2025

Accepted: 14th November 2025

Online: 15th November 2025

KEYWORDS

Operator, avtomorfizm,
algebra, integral, Fon Neyman
algebrasi.

ABSTRACT

Ushbu ishda I-tur W^ -algebralarining markaziy kengaytmalarining avtomorfizmlari ko'rib chiqiladi. Markazni fiksirllovchi va lokal o'lchov topologiyasida uzluksiz bo'lgan har qanday avtomorfizm ichki ekanligi isbotlangan.*

Kirish

Operator algebralarining avtomorfizmlarini o'rganish zamonaviy funksional tahlil va kvant nazariyasida asosiy ahamiyatga ega. Operatorlarning o'lchovli maydonlar algebralariga izomorf bo'lgan I-tur W^* -algebralari alohida qiziqish uyg'otadi.

S. Sakaining klassik ishida [2] faktor algebra $B(H)$ ning har bir $*$ -avtomorfizmi ichki ekanligi ko'rsatilgan. Keyinchalik Alberverio, Ayupov va Kudaybergenov [1] buni I-tur algebralarining markaziy kengaytmalariga umumshtirdilar.

Ushbu maqolada biz markaziy kengaytmaning markazni fiksirllovchi avtomorfizmi har doim ichki ekanligiga sodda va konstruktiv isbotni keltiramiz. Bu tasdiqni $B(H)$ algebralari to'g'ri integrali avtomorfizmlari tavsifining lokal shakli sifatida ko'rib chiqish mumkin.

1 Kerakli ta'riflar va belgilashlar



Ta'rif 1.1 W^* -algebra (Fon Neyman algebrasi) deb $B(H)$ algebrasining kuchsiz operator topologiyasiga nisbatan yopiq va I birlik elementini o'z ichiga olgan $*$ -qism-algebraga aytiladi.

Ta'rif 1.2 W^* -algebraning avtomorfizmi deb $\Phi: M \rightarrow M$ biyektiv akslantirishga aytiladi, u chiziqli bo'lib, $*$ -operatsiyani va ko'paytmani saqlaydi:

$$\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b), \quad \Phi(a^*) = \Phi(a)^*, \quad a, b \in M.$$

Ta'rif 1.3 Φ avtomorfizmi, agar M da shunday $u \in M$ unitar element mavjud bo'lsa, ichki deb ataladi:

$$\Phi(a) = uau^*, \quad \forall a \in M.$$

Ta'rif 1.4 $Z(M)$ markaziga ega bo'lgan M – W^* -algebra bo'lsin. **Markaziy kengaytma** M – M ga nisbatan barcha lokal o'lchovli operatorlar to'plami sifatida aniqlanadi, ya'ni shunday (ehtimol chegaralanmagan) x operatorlari mavjud bo'lib, ular uchun $zx \in M$ bo'lgan $z \in Z(M)$, $z \neq 0$ markaziy proyektor mavjud.

Ta'rif 1.5 M dagi lokal o'lchov topologiyasi markaz proyeksiyalarida lokal o'lchov bo'yicha yaqinlashish bilan indutsirlangan topologiyadir, ya'ni (a_n) ketma-ketligi a ga yaqinlashadi, agar har bir chekli o'lchovli markaziy z proyektori uchun $z(a_n - a) \rightarrow 0$ o'lchov topologiyasida yaqinlashsa.

Ta'rif 1.6 W^* -algebra **I-tur** deb ataladi, agar $u \int_x^{\oplus} B(H_x) d\mu(x)$ to'g'ri integralga izomorf bo'lsa, bu yerda har bir $B(H_x)$ I-tur faktordir.

2. Asosiy qism

(X, μ) – σ -chekli standart o'lchovli fazo, H – separabel cheksiz o'lchovli Gilbert fazosi bo'lsin. Quyidagi algebrani ko'rib chiqamiz:

$$M = L^\infty(X, \mu) \bar{\otimes} B(H) \cong L^\infty(X, \mu; B(H)),$$

va uning markaziy kengaytmasi M , u $a(x) \in B(H)$ operatorlarning o'lchovli (lokal o'lchov bo'yicha) maydonlaridan tashkil topgan.

Teorema 2.1 $\Phi: M \rightarrow M$ $*$ -avtomorfizm bo'lsin, u:

1. markazni nuqtaviy fiksirlaydi: $\Phi(f \otimes I_H) = f \otimes I_H$ barcha $f \in L^\infty(X, \mu)$ lar uchun;

2. lokal o'lchov topologiyasida uzluksizdir.

U holda $x \mapsto u(x) \in \mathcal{U}(H)$ unitarlarning o'lchovli maydoni mavjud bo'lib, deyarli barcha $x \in X$ va barcha $a \in M$ lar uchun

$$(\Phi(a))(x) = u(x)a(x)u(x)^*.$$

Boshqacha qilib aytganda, $\Phi = Ad(u)$ – o'lchovli unitar maydon $u \in M$ tomonidan amalga oshirilgan ichki avtomorfizmdir.



Isbot. Φ markazni $Z(M) = L^\infty(X) \otimes I_H$ fiksirlaganligi sababli, barcha $f \in L^\infty(X)$ lar uchun quyidagi o'rinli:

$$\Phi((f \otimes I_H)a) = (f \otimes I_H)\Phi(a),$$

demak, Φ fibrallar bo'yicha harakat qiladi. Deyarli barcha $x \in X$ lar uchun quyidagini aniqlaymiz:

$$\Phi_x : B(H) \rightarrow B(H), \quad \Phi_x(a(x)) = (\Phi(a))(x).$$

Har bir $\Phi_x B(H)$ ning $*$ -avtomorfizmi bo'lib, Sakai teoremasiga ko'ra [2] bunday har qanday avtomorfizm ichki hisoblanadi, ya'ni shunday $u(x) \in \mathcal{U}(H)$ mavjudki: $\Phi_x(a) = u(x)au(x)^*$.

Kuratowski-Ryll-Nardzewski teoremasidan [5] foydalanib, $x \mapsto u(x)$ o'lchovli seksiyani tanlaymiz. U holda $u = (u(x))_{x \in X}$ element M ni aniqlaydi va barcha $a \in M$ lar uchun

$$(\Phi(a))(x) = u(x)a(x)u(x)^*,$$

bu esa isbotni yakunlaydi.

Izoh 2.2 Markazni fiksirlash sharti avtomorfizmning ichki bo'lishi uchun yetarli shart hisoblanadi. Agar markazdagi harakatga ruxsat berilsa, avtomorfizm to'g'ri integral komponentlarining o'rnini almashtirishni keltirib chiqarishi mumkin, bu esa tashqi avtomorfizmlarga mos keladi.

Xulosa

Olingan natija I-tur markaziy kengaytmalarining avtomorfizmlari ichki tuzilishining oddiy tavsifini beradi va o'lchovli operatorlar nazariyasi va kvant simmetriyasidagi klassifikatsiya masalalarida qo'llanilishi mumkin. Keyinchalik II va III-turdagi algebralar uchun shunga o'xshash tasdiqlarni ko'rib chiqish rejalashtirilgan.

References:

1. S. Albeverio, Sh. A. Ayupov, K. K. Kudaybergenov, R. T. Djumamuratov, *Automorphisms of central extensions of type I von Neumann algebras*, *Studia Mathematica*, 207(1) (2011), 1–17.
2. S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Springer, 1991.
3. R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Vol. II*, American Mathematical Society, 1997.
4. M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, Springer, 1979.
5. K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, *Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math.*, 13 (1965), 397–403.