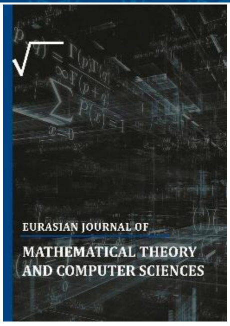
EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
IF = 9.206 www.in-academy.uz/index.php/ejmtcs



ZORGEFREY STRAIGHT LINE HOMEOMORPHISM AND ITS S_Q MODIFICATION

Kukieva Sayora Sayidakbarovna
Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Physics and Mathematics Fergana State University
kukievasaera97@qmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.19453791

ARTICLE INFO

Received: 29th March 2026
Accepted: 06th April 2026
Online: 07th April 2026

KEYWORDS

Sorgenfrey line, homeomorphism, Baire space, first category set.

ABSTRACT

The article examines the topological properties of the Zorgefrey line - a set of real numbers R assigned to the topology of the lower half-intervals of the form $[a;b)$, and also considers its modifications. The conditions for the homeomorphism of the Zorgephreesian line with the Euclidean line and other topological spaces are analyzed. It is shown that, despite the coincidence of the carrier, the Zorgefrye line is not a homeomorphic standard real line due to the differences in the bases of topologies and their invariant properties.

ZORGEFREY TO‘G‘RI ChIZIG‘I GOMEOMORFIZMI VA UNING S_Q MODIFIKATSIYASI

Kukiyeva Sayora Sayidakbarovna
Fizika-matematika fakulteti matematika kafedrasi dotsenti
Farg‘ona davlat universiteti
kukievasaera97@qmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.19453791

ARTICLE INFO

Received: 29th March 2026
Accepted: 06th April 2026
Online: 07th April 2026

KEYWORDS

Zorgenfreyning strelkasi, gomeomorfizm, berov fazosi, birinchi toifadagi to‘plam.

ABSTRACT

Maqolada ko‘rinishdagi quyi yarim intervallar topologiyasiga ega bo‘lgan R haqiqiy sonlar to‘plami - Zorgefrey to‘g‘ri chizig‘ining topologik xossalari o‘rganiladi va uning modifikatsiyalari $[a;b)$ ko‘rib chiqiladi. Zorgefray to‘g‘ri chizig‘ining Yevklid to‘g‘ri chizig‘i va boshqa topologik fazolar bilan gomeomorfizm shartlari tahlil qilinadi. Tashuvchining ustma-ust tushishiga qaramay, topologiya bazalari va ularning invariant xossalaridagi farqlar tufayli Zorgefreyning to‘g‘ri chizig‘i gomeomorf standart haqiqiy to‘g‘ri chiziq emasligi ko‘rsatilgan. Ikkita topologik fazoning, xususan, Zorgenfreyning to‘g‘ri chizig‘i S va uning S_Q modifikatsiyalarining nogomeomorfligi isbotlangan, bu yerda Q - to‘g‘ri chiziqdagi ratsional sonlar to‘plami.

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
IF = 9.206 www.in-academy.uz/index.php/ejmtcs

Kirish. Isbotlashda biror $(a;b)\subset S$ oraliqda gomeomorfizmning monotonligidan $\varphi : S \to S$ foydalaniladi. Bu faktni E. K. Van Douven[1] aniqlagan. Zorgenfreyning to‘g‘ri chizig‘i gomeomorfizmi va uning modifikatsiyalari haqidagi masalalar V.A. Chatyrko, Y. Hattory[2] ishlarida ko‘rib chiqilgan bo‘lib, ularda biror A to‘plamdagi "strelka" topologiyasi Yevklid topologiyasiga almashtirilgan, shuningdek Ye.S. Suxacheva, T.Ye. Xmileva[3] ishlarida agar A - R to‘g‘ri chiziqdagi sanoqli yopiq to‘plamning qism to‘plami bo‘lsa va S fazo S_Q ga o‘xshash aniqlansa, S va S_A fazolarning gomeomorfligi isbotlangan. Olingan natijalar fazolarni gomomorfizm nuqtayi nazaridan tasniflash masalasida topologik invariantlarning rolini aniqlashtiradi.

Materiallar va metodlar. Ishda quyidagi belgilashlardan foydalanilgan: N - natural sonlar to‘plami; R - standart Yevklid topologiyasi berilgan haqiqiy sonlar to‘plami; $Q\subset R$ - irratsional sonlar qism to‘plami; S -Zorgenfreyning to‘g‘ri chizig‘i (yoki "strelka") topologiyasi $\{(a;b]: a,b\in R, a<b\}$ bazasi bilan hosil qilingan.

Agar to‘plam $A\subset R$ bo‘lsa, u holda S_A orqali topologiya bilan berilgan haqiqiy sonlar to‘plami belgilanadi, unda atroflar bazasi quyidagicha aniqlanadi:

agar $x\in A$, mo $B_x=\{(x;a]: a\in R, x<a\}$

agar $x\in R/A$, mo $B_x=\{(a;x]: a\in R,\ a<x\}$

Agar oraliq $(a;b)\subset S_A$, yozamiz $(a;b)_A$.

Natijalar. 1 ta’rif. Agar X dagi hamma joyda zich bo‘lgan ochiq qism to‘plamlar ketma-ketligining kesishmasi hamma joyda zich bo‘lsa, X topologik fazo ber fazosi deyiladi.

Ishning asosiy natijasi quyidagi teoremadir.

1-teorema. S va S_Q fazolar gomeomorf emas.

Ushbu teoremani isbotlash uchun bizga quyidagi faktlar kerak bo‘ladi.

1-taklif. S fazo berov fazosidir.

Isbot. Aytaylik, $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ - S dagi hamma joyda ochiq zich qism to‘plamlar ketma-ketligi bo‘lsin. Har bir G_n to‘plam $(a;b]$ yoki $(c;d)$ ko‘rinishdagi kesishmaydigan intervallar birlashmasidir. $(a;b]$ ko‘rinishdagi oraliqlarni $(a;b)$ oraliqlarga almashtirib, R to‘g‘ri chiziqda ochiq va

[1] Van Douwen E.K. Retracts of the Sorgenfrey line. Compositio Mathematica. 1979. T. 38. No. 2. P. 155-161.

[2] Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers. Comment. Math. Univ. Carolin. 2013. V. 54. No. 2. P. 189-196.

[3] Хмылева Т.Е., Сухачева Е.С. О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея. 2015.

R da hamma joyda zich bo‘ladigan G_n' to‘plamni hosil qilamiz. R - berov fazosi bo‘lgani uchun $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n'$ hamma joyda R da zich, demak, hamma joyda S da zich.

Berov fazosidagi zich G_δ - to‘plamlar ber (Tkachuk[4]) to‘plamlari bo‘lgani uchun quyidagi natijaga ega bo‘lamiz.

1-natija. Irratsional nuqtalar qism to‘plami $J \subset S_Q$ berov fazosidir.

2-taklif. Har qanday $A \subset R$ qism to‘plam uchun S_A fazo Ber fazosi bo‘ladi.

Isbot 1-taklifga o‘xshash, faqat farqi shundaki, $G \subset S_A$ ochiq to‘plamlar $(a;b), [a;b), (a;b]$ *или* $[a;b]$ ko‘rinishdagi kesishmaydigan intervallar birlashmasidan iborat.

1-teoremani isboti. Teoremani teskarisi orqali isbotlash usuli bilan isbotlaymiz. Aytaylik, $\varphi : S_Q \to S$ mavjud bo‘lsin. U holda $\varphi|_J$ J fazoning biror S qism to‘plamga gomeomorfizmi bo‘ladi. Har bir $N \in n$ uchun quyidagi to‘plamni ko‘rib chiqamiz

$$F_n = \left\{ x \in J : x - \frac{1}{n} < y < x \text{ и } y \in J \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(x) \right\}$$

.

$F_1 \subset F_2 \subset \dots$ ekanligini ko‘rish qiyin emas. φ akslantirish uzluksiz bo‘lganligi sababli, har bir $x \in J$ nuqta uchun shunday $(x - \varepsilon; x]$ atrofi topiladiki, unda ixtiyoriy $y \in (x - \varepsilon; x]$ uchun $\varphi(y) < \varphi(x)$ bo‘ladi. Shuning uchun, $\bigcup_{n-1}^{\infty} F_n = J$.

F_n to‘plamining J da yopiq ekanligini ko‘rsatamiz. Aytaylik, $x_0 \in J$ nuqta F_n to‘plam uchun limit bo‘lsin. U holda $\lim_{x \to \infty} x_k = x_0$ bo‘ladigan o‘suvchi $x_k \in J_n$ ketma-ketlik mavjud. $y \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 \right) \cap J$ nuqta uchun x_{k_0} topiladi, u uchun $y < x_{k_0} < x_0$. Demak, barcha $k \geq k_0$ larda $y < x_k < x_0$ tengsizlik bajariladi. $x_k \in F_n$ va $y \in \left(x_k - \frac{1}{n}, x_k \right)$ bo‘lgani uchun $y < x_{k_0} < x_0$ bo‘ladi, va φ funksiya uzluksiz bo‘lgani uchun $\varphi(y) < \varphi(x_0)$ tengsizlik bajariladi. φ geomorfizm bo‘lgani uchun va $y \neq x_0$ nidan, $\varphi(y) < \varphi(x_0)$ bo‘ladi va F_n ta’rifga ko‘ra $x_0 \in F_n$ ga ega bo‘lamiz.

1- taklifga ko‘ra J to‘plam berov fazosi bo‘ladi va $\operatorname{int}_J F_{n_0} \neq \varnothing$ bo‘lgan uchun $n_0 \in N$ nomer mavjud. Demak, shunday $(p;q)$ interval mavjudki, uning uchun $(p;q) \cap J \subset F_{n_0}$. Umumiylikni

[4] Tkachuk V.V. Cp-theory Problem Book. Topological and functional analysis. Springer, 2015.

EURASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES
Innovative Academy Research Support Center
IF = 9.206 www.in-academy.uz/index.php/ejmtcs

buzmagan holda, $q-p<\frac{1}{n_0}$ deb hisoblash mumkin. Ixtiyoriy ikkita $x,y\in(p;q)\cap J$ nuqta uchun $\varphi(x)<\varphi(y)$ tengsizlik o‘rinli, chunki $y_0\in F_{n_0}$ va $y-\frac{1}{n_0}<x<y$, ya’ni φ funksiya $(p;q)\cap J$ oraliqda qat’iy o‘suvchi.

Endi $r\in(p;q)\subset S_Q$ ratsional nuqtani va $x_k\in(p;q)$ irratsional nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz, bunda $\lim\limits_{x\to\infty}x_k=r$ va $x_1>x_2>\cdots$ φ funksiyaning $(p;q)\cap T$ oraliqda o‘sishi tufayli $\varphi(x_k)$ ketma-ketlik S "strelka"da kamayuvchi bo‘ladi, bu esa φ funksiyaning uzluksizligi tufayli bajarilishi kerak bo‘lgan $\lim\varphi(x_k)=\varphi(r)$ shartga ziddir.

2-teorema. Agar $T\subset S$ qism to‘plam S gomeomorf bo‘lsa, u holda 1 taklifga ko‘ra T fazo berov fazosi bo‘ladi. Demak, $T\setminus D$ ham berov to‘plamidir, chunki u T[4] dagi zich G_δ - qism to‘plamdir. Bundan tashqari, T va S larning gomeomorfligidan ixtiyoriy $\varepsilon\succ 0$ va $t\in T$ lar uchun $(t-\varepsilon,t]\cap T\setminus D$ to‘plamning sanoqsiz ekanligi kelib chiqadi. Bu shuni anglatadiki, ixtiyoriy $d\in D\subset T$ nuqta uchun d nuqtaga o‘suvchi $y_n\in T\setminus D$ ketma-ketlik topiladi va demak, S_D fazoda $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limit nuqtalarga ega emas.

Endi $\varphi:S_D\to S$ gomeomorfizm mavjud deb faraz qilaylik. Xuddi 1-teoremadagidek, $\varphi:(p;q)\cap T\setminus D$ funksiya o‘suvchi bo‘ladigan $(p;q)$ intervalning mavjudligini isbotlaymiz. $T\setminus D$ to‘plamdan $d_1,d_2\in(p;q)\cap D$, $d_1\prec d_2$ nuqtalarni va $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ nuqtalar ketma-ketligini qaraymiz, ular o‘sib borib mos ravishda d_1 va d_2 nuqtalarga yaqinlashadi, lekin S_D da limit nuqtalarga ega bo‘lmaydi. Bundan kelib chiqadiki

$$\varphi(y_1)<\cdots<\varphi(y_n)<\cdots\varphi(z_1)<\cdots\varphi(z_n)<\cdots$$

va, demak, o‘suvchi $\varphi(y_n)$ ketma-ketlik chegaralangan, demak, S fazoda yaqinlashuvchi bo‘ladi. φ^{-1} akslantirishning uzluksizligi haqidagi jumla bilan ziddiyatga ega bo‘lamiz.

2-natija. Aytaylik, $F\subset S$ - izolyatsiyalangan nuqtalarga ega bo‘lmagan yopiq qism fazo va $D\subset F$ - F qism to‘plamda hamma joyda zich bo‘lgan sanoqli qism to‘plam bo‘lsin. U holda S_D va S fazolar gomeomorf emas.

Isbot uchun bu holda F qism fazo S ga gomeomorf ekanligini ta’kidlash kifoya. Bu faktning isbotini[5] ishda topish mumkin. Ishda Zorgefreyning to‘g‘ri chizig‘i va uning modifikatsiyalarining topologik xarakteristikalari gomeomorfizm nuqtayi nazaridan tahlil qilingan. Ochiq to‘plamlarning bazis sistemalaridagi farq topologik invariantlarda Yevklid to‘g‘ri chizig‘iga nisbatan sezilarli farqlarga olib kelishi aniqlandi.

Xulosa. Ko‘rsatilgan fazolarning nogomeomorfligi ularning ko‘paytmalari xossalari va strukturaviy xarakteristikalaridagi farqlar asosida isbotlangan. Tadqiqot shuni ko‘rsatdiki, Zorgenfrey to‘g‘ri chizig‘i topologiyasining modifikatsiyalari alohida topologik xususiyatlarning saqlanishi yoki yo‘qolishiga sezilarli ta’sir ko‘rsatadi, bu esa gomeomorfizm tabiatini va uning fazo invariantlariga bog‘liqligini chuqurroq tushunishga imkon beradi.

References:

1. Van Douwen E.K. Retracts of the Sorgenfrey line. Compositio Mathematica. 1979. T. 38. No. 2. P. 155-161.
2. Chatyrko V.A., Hattori Y. A poset of topologies on the set of real numbers. Comment. Math. Univ. Carolin. 2013. V. 54. No. 2. P. 189-196.
3. Хмылева Т.Е., Сухачева Е.С. О некоторых линейно упорядоченных топологических пространствах, гомеоморфных прямой Зоргенфрея. 2015.
4. Tkachuk V.V. Cp-theory Problem Book. Topological and functional analysis. Springer, 2015.
5. Burke D.K., Moore J.T. Subspaces of the Sorgenfrey line. Topology and its Applications. 1998. V. 90. No. 1. P. 57-68.

[5] Burke D.K., Moore J.T. Subspaces of the Sorgenfrey line. Topology and its Applications. 1998. V. 90. No. 1. P. 57-68.