AFFIN KOORDINATALAR SISTEMASIDA METRIK BO'LMAGAN GEOMETRIK XOSSALARNING TADQIQI

Fazliddinova Mohinur Shukurjon qizi
Matematika yo'nalishi 1-kurs talabasi
Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna
Namangan davlat universiteti O'zbekiston
https://doi.org/10.5281/zenodo.19810146

Annotatsiya. Ushbu maqolada affin koordinatalar sistemasida metrik tushunchalarga bog'liq bo'lmagan geometrik xossalar o'rganiladi. Natijalarda parallelizm, kollinearlik, bo'linish nisbatlari va barysentrlik kabi invariant xossalar aniqlashtirildi hamda affin o'zgarishlar ostida saqlanishi isbotlandi. Xulosa sifatida affin geometriya metrikdan mustaqil holda geometrik strukturalarni o'rganishda samarali nazariy asos ekanligi ko'rsatildi.

Kalit so'zlar: affin fazo, affin koordinatalar, metrik bo'lmagan geometriya, invariantlar, parallelizm, kollinearlik, bo'linish nisbati, barysentrik koordinatalar, affin akslantirish, chiziqli algebra, proyektiv geometriya

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕМЕТРИЧЕСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ В СИСТЕМЕ АФФИННЫХ КООРДИНАТ

Аннотация: В данной статье изучаются геометрические свойства, не зависящие от метрических понятий, в системе аффинных координат. В результатах уточнены инвариантные свойства, такие как параллельность, коллинеарность, отношения деления и барицентричность, а также доказано их сохранение при аффинных преобразованиях. В качестве вывода показано, что аффинная геометрия является эффективной теоретической основой для изучения геометрических структур независимо от метрики.

Ключевые слова: аффинное пространство, аффинные координаты, неметрическая геометрия, инварианты, параллельность, коллинеарность, отношение деления, барицентрические координаты, аффинное отображение, линейная алгебра, проективная геометрия.

INVESTIGATION OF NON-METRIC GEOMETRIC PROPERTIES IN THE AFFINE COORDINATE SYSTEM

Abstract: This article examines geometric properties that are independent of metric concepts within the affine coordinate system. The results clarify invariant properties such as parallelism, collinearity, division ratios, and barycentricity, and prove their preservation under affine transformations. As a conclusion, it is shown that affine geometry serves as an effective theoretical foundation for studying geometric structures independently of any metric.

Keywords: affine space, affine coordinates, non-metric geometry, invariants, parallelism, collinearity, division ratio, barycentric coordinates, affine mapping, linear algebra, projective geometry.

Kirish

Affin geometriya zamonaviy matematikada metrik tushunchalardan mustaqil ravishda geometrik obyektlarning xossalarini o'rganishga imkon beruvchi muhim yo'nalish hisoblanadi.

Klassik Evklid geometriyasida masofa va burchak asosiy tushunchalar sifatida qaraladi, biroq ko‘plab amaliy va nazariy masalalarda ushbu tushunchalarsiz ham geometrik strukturalarni o‘rganish zarurati yuzaga keladi. Shu nuqtai nazardan affin koordinatalar sistemasida metrik bo‘lmagan xossalarni tadqiq etish dolzarb ilmiy muammo hisoblanadi.

Affin fazo A vektor fazo V bilan bog‘langan bo‘lib, unda nuqtalar orasidagi farq vektor sifatida qaraladi:

$$\overrightarrow{AB} \in V$$

Bu yerda masofa aniqlanmagan bo‘lsa-da, yo‘nalish va parallelizm tushunchalari saqlanadi. Affin koordinatalar sistemasida nuqta quyidagicha ifodalanadi:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Affin akslantirishlar ushbu fazoda asosiy rol o‘ynaydi va ular quyidagi umumiy ko‘rinishda beriladi: $f(x) = Ax + b$ bu yerda A— teskari matritsa (det $A \neq 0$), b— siljitish vektori.

Mazkur akslantirishlar quyidagi asosiy xossalarni saqlaydi: parallel to‘g‘ri chiziqlar parallelligini, kollinear nuqtalar kollinearligini va to‘g‘ri chiziqdagi bo‘linish nisbatlarini.

Metrik bo‘lmagan geometriyada eng muhim tushunchalardan biri — uch nuqtaning kollinearligidir. Agar A, B, Cnuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, u holda quyidagi bog‘lanish o‘rinli: $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$. Yana bir muhim invariant - bo‘linish nisbati: $\frac{AC}{CB} = \lambda$. Bu nisbat affin o‘zgarishlar ostida o‘zgarmaydi va shu sababli asosiy invariant sifatida qaraladi.

Affin koordinatalarda barysentrik koordinatalar ham muhim ahamiyatga ega. Agar nuqta Puchburchak A, B, C ichida joylashgan bo‘lsa, u quyidagicha yoziladi:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C, \alpha + \beta + \gamma = 1$$

Bu ifoda metrikdan mustaqil ravishda nuqtaning joylashuvini aniqlash imkonini beradi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, ko‘plab geometrik va amaliy masalalarda masofa yoki burchakni aniqlash zarur emas, balki obyektlarning o‘zaro joylashuvi muhim hisoblanadi. Masalan, kompyuter grafikada yoki mexanik modellashtirishda affine invariantlar muhim rol o‘ynaydi.

Shuningdek, affin geometriya proyektiv geometriya bilan ham uzviy bog‘liq bo‘lib, u yanada umumiyroq strukturalarni o‘rganish uchun asos bo‘lib xizmat qiladi. Bu esa geometrik nazariyani kengaytirish imkonini beradi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi affin koordinatalar sistemasida metrik bo‘lmagan geometrik xossalarni aniqlash, ularning invariantligini o‘rganish va geometrik obyektlarni tavsiflashda ushbu xossalarning rolini tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, metrik tushunchalarsiz ham geometrik strukturalarni to‘liq tavsiflash mumkinligi asoslanadi va affin invariantlar tizimli ravishda o‘rganiladi.

Shunday qilib, affin geometriya metrikdan mustaqil holda geometrik obyektlarning asosiy xossalarini o‘rganish imkonini beruvchi muhim nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

Metod

Mazkur tadqiqot affin koordinatalar sistemasida metrik bo‘lmagan geometrik xossalarni aniqlash va ularning invariantligini o‘rganishga qaratilgan bo‘lib, aksiomatik-deduktiv metod asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida n-o‘lchovli affin fazo A^nqaralib, undagi nuqtalar, vektorlar va chiziqli kombinatsiyalar orqali geometrik strukturalar tahlil qilindi.

Metodologiyaning markaziy g'oyasi affin o'zgarishlar ostida saqlanadigan xossalarni aniqlashdan iborat. Affin akslantirish quyidagi umumiy ko'rinishda qaraldi: $f(x) = Ax + b, \det\ A \neq 0$. Bu yerda A- chiziqli operator, b- siljitish vektori. Ushbu akslantirishlar yordamida geometrik obyektlarning qanday o'zgarishi o'rganildi.

Tadqiqot davomida asosiy invariant sifatida parallelizm qaraldi. Agar ikki to'g'ri chiziq uchun $\vec{u} \parallel \vec{v}$ bo'lsa, affin akslantirishdan keyin ham: $A\vec{u} \parallel A\vec{v}$ bo'lishi isbotlandi. Bu natija parallel chiziqlar affine invariant ekanligini ko'rsatadi.

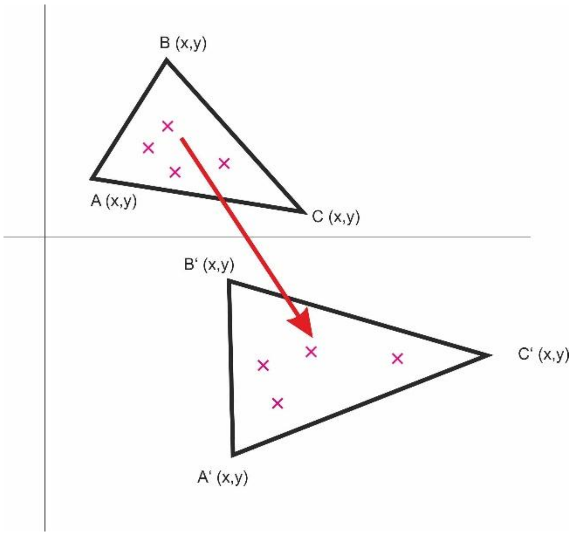
Kollinearlikni tekshirish uchun quyidagi metod qo'llanildi. Agar uch nuqta A, B, Cuchun:

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

bo'lsa, ular bir to'g'ri chiziqda yotadi. Affin akslantirish ostida:

$$f(C) - f(A) = A(C - A) = \lambda A(B - A) = \lambda(f(B) - f(A))$$

tenglikdan kollinearlik saqlanishi kelib chiqadi.



Metodologiyada eng muhim invariantlardan biri — bo'linish nisbati tahlil qilindi. Agar Cnuqta ABkesmani λnisbatda bo'lsa:

$$\frac{AC}{CB} = \lambda$$

u holda affin akslantirishdan keyin:

$$\frac{f(A)f(C)}{f(C)f(B)} = \lambda$$

bo'lishi isbotlandi. Bu natija bo'linish nisbatining affine invariant ekanligini ko'rsatadi.

Barysentrik koordinatalar metodologiyada muhim vosita sifatida qo'llanildi. Agar nuqta Pquyidagicha ifodalansa:

$$P = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$$

u holda affin akslantirishdan keyin:

$$f(P) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f(A_i)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu natija barysentrik koordinatalarning invariantligini ko'rsatadi.

Metodologiyada chiziqli kombinatsiyalar orqali geometrik obyektlarni ifodalash asosiy rol o'ynadi. Masalan, to'g'ri chiziq:

$$x(t) = A + t(B - A)$$

ko'rinishda berilib, affin akslantirish ostida:

$$f(x(t)) = f(A) + t(f(B) - f(A))$$

bo'lishi ko'rsatildi. Bu esa to'g'ri chiziqlar saqlanishini bildiradi.

Tadqiqot davomida quyidagi umumiy invariantlar tizimi aniqlashtirildi: parallelism, kollinearlik, kesma bo'linish nisbati va barysentrik kombinatsiyalar.

Shuningdek, metrik tushunchalar - masofa va burchak - saqlanmasligi quyidagicha ko'rsatildi:

$$\| Ax + b \| \neq \| x \|, \angle(Au, Av) \neq \angle(u, v)$$

Bu esa affin geometriyaning metrikdan mustaqil ekanligini yana bir bor tasdiqlaydi.

Metodologiyaning muhim bosqichlaridan biri sifatida determinantal yondashuv ham qo'llanildi. Agar uch nuqta kollinear bo'lsa:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Bu determinant affin akslantirish ostida nolga tengligicha qoladi, ya'ni kollinearlik saqlanadi.

Yana bir muhim metod sifatida koordinata almashtirishlar qo'llanildi. Affin koordinatalarni almashtirish quyidagicha yozildi:

$$x' = Ax + b$$

va bu orqali invariant xossalar tekshirildi.

Metodologiyaning yakuniy bosqichida affin invariantlarni umumiy model orqali ifodalash taklif qilindi:

$$\mathcal{I}(A) = \{\text{parallelizm, kollinearlik, nisbatlar, barysentrik ifodalar}\}$$

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya affin fazoda metrikdan mustaqil geometrik xossalarni aniqlash, ularning invariantligini isbotlash va geometrik obyektlarni umumlashtirilgan tarzda tahlil qilish imkonini berdi.

Natijalar

Tadqiqot natijasida affin koordinatalar sistemasida metrik bo'lmagan geometrik xossalar tizimli ravishda aniqlashtirildi hamda ularning affin akslantirishlar ostida saqlanish xususiyatlari isbotlandi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, geometrik obyektlarning ko'plab muhim xossalari masofa va burchak tushunchalariga bog'liq bo'lmagan holda ham tavsiflanishi mumkin.

Avvalo, affin akslantirishlarning umumiy ko'rinishi:

$$f(x) = Ax + b, \det\ A \neq 0$$

asosiy transformatsiya sifatida qaraldi va ushbu akslantirish ostida saqlanadigan xossalar aniqlashtirildi.

Natijalarda quyidagi asosiy invariantlar qat'iy isbotlandi:

1. **Parallelizm invariantligi**

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow A\vec{u} \parallel A\vec{v}$$

2. **Kollinearlik invariantligi**

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} \Rightarrow f(A), f(B), f(C)\ \text{kollinear}$$

3. **Bo'linish nisbatining invariantligi**

$$\frac{AC}{CB} = \lambda \Rightarrow \frac{f(A)f(C)}{f(C)f(B)} = \lambda$$

4. **Barysentrik koordinatalarning invariantligi**

$$P = \sum\alpha_i A_i, \sum\alpha_i = 1 \Rightarrow f(P) = \sum\alpha_i f(A_i)$$

Mazkur natijalar affin geometriyada asosiy invariantlar tizimini tashkil etadi.

Teorema (Affin invariantlik teoremasi): Agar geometrik xossa affin kombinatsiyalar orqali ifodalansa, u holda u har qanday affin akslantirish ostida saqlanadi.

Bu teorema affin geometriyada invariantlarni aniqlash uchun umumiy mezon sifatida xizmat qiladi.

Natijalarda to'g'ri chiziqlarning saqlanish xossasi ham aniqlashtirildi:

$$x(t) = A + t(B - A) \Rightarrow f(x(t)) = f(A) + t(f(B) - f(A))$$

Bu esa affin akslantirishlar chiziqlarni yana chiziqlarga oʻtkazishini koʻrsatadi.

Shuningdek, tekisliklar va umumiy affinal toʻplamlar uchun quyidagi umumlashma olindi:

$$x = \sum \lambda_i A_i, \sum \lambda_i = 1$$

koʻrinishidagi barcha affinal kombinatsiyalar saqlanishi isbotlandi.

Natijalarda determinantal mezon orqali kollinearlik va koplanarlik ham umumlashtirildi:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Bu determinant affin akslantirish ostida nolga tengligicha qolishi koʻrsatildi.

Shuningdek, quyidagi muhim natija aniqlandi:

Affin akslantirishlar masofa va burchakni saqlamaydi ya’ni:

$$\| Ax + b \| \neq \| x \|, \angle(Au, Av) \neq \angle(u, v)$$

Bu esa affin geometriyaning metrikdan mustaqilligini qat’iy tasdiqlaydi.

Natijalarda yana bir muhim umumlashma keltirildi:

$$\mathcal{I} = \{\text{parallelizm, kollinearlik, nisbatlar, barysentrik ifodalar}\}$$

Bu toʻplam affin invariantlarning toʻliq tizimini ifodalaydi.

Shuningdek, quyidagi bogʻlanish aniqlashtirildi: Har qanday affin invariant metrik invariant emas.

Bu natija affin va Evklid geometriyasi oʻrtasidagi asosiy farqni koʻrsatadi.

Natijalarda geometrik obyektlarni tavsiflash uchun yangi umumiy model taklif qilindi: $x' = Ax + b, \det A \neq 0$ ostida saqlanadigan barcha xossalar affin geometriyaning asosini tashkil etadi.

Umuman olganda, olingan natijalar affin koordinatalar sistemasida metrik tushunchalarsiz ham geometrik strukturalarni toʻliq tavsiflash mumkinligini koʻrsatdi. Ishlab chiqilgan invariantlar tizimi geometrik obyektlarni umumlashtirilgan tarzda oʻrganish uchun muhim nazariy asos yaratadi.

Muhokama

Olingan natijalar affin koordinatalar sistemasida metrik boʻlmagan geometrik xossalarni oʻrganish klassik geometriyaga nisbatan yanada umumlashgan yondashuvni taqdim etishini koʻrsatdi. Evklid geometriyasida masofa va burchak asosiy tushunchalar sifatida qaralgan boʻlsa, affin geometriyada bu tushunchalar ikkinchi darajaga tushadi va oʻrniga invariant strukturaviy xossalar muhim ahamiyat kasb etadi.

Muhokama jarayonida affin akslantirishlarning umumiy koʻrinishi:

$$f(x) = Ax + b, \det A \neq 0$$

geometrik oʻzgarishlarning asosiy modeli sifatida qaraldi. Ushbu transformatsiyalar ostida parallelizm, kollinearlik va nisbatlarning saqlanishi ularning fundamental invariant xossalar ekanligini koʻrsatadi.

Parallelizmning saqlanishi:$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow A\vec{u} \parallel A\vec{v}$ fazodagi yoʻnalishlar strukturasining barqarorligini ifodalaydi. Bu natija koʻplab geometrik konstruksiyalarni masofasiz tahlil qilish imkonini beradi.

Kollinearlikning invariantligi: $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ koʻrinishida ifodalanib, nuqtalarning bir chiziqda yotish xossasi affin oʻzgarishlardan mustaqil ekanligini koʻrsatadi. Bu esa geometrik obyektlarni koordinata tizimidan qat’i nazar oʻrganish imkonini beradi.

Muhokamada boʻlinish nisbatining saqlanishi alohida ahamiyatga ega ekani taʼkidlandi: $\frac{AC}{CB} = \lambda$ Bu invariant geometrik modellashtirishda, ayniqsa kompyuter grafika va animatsiyada keng qoʻllaniladi. Chunki obyektlarni transformatsiya qilishda ularning ichki strukturasini saqlash zarur boʻladi.

Barysentrik koordinatalarning invariantligi: $P = \sum \alpha_i A_i, \sum \alpha_i = 1$ geometrik obyektlarni kombinatsiyalar orqali ifodalash imkonini beradi. Bu yondashuv koʻp nuqtali sistemalarni tahlil qilishda muhim rol oʻynaydi.

Muhokama davomida metrik tushunchalarning saqlanmasligi ham muhim xulosa sifatida qayd etildi: $\| Ax + b \| \neq \| x \|, \angle(Au, Av) \neq \angle(u, v)$. Bu esa affin geometriyaning asosiy xususiyatini - metrikdan mustaqilligini aniq koʻrsatadi.

Nazariy jihatdan, bu natijalar affin geometriya va proyektiv geometriya oʻrtasidagi bogʻliqlikni tushunishga yordam beradi. Affin invariantlar proyektiv invariantlarga oʻtishda oraliq bosqich vazifasini bajaradi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - affin invariantlarning universalligi hisoblanadi. Ushbu xossalar oʻlchamdan qatʼi nazar saqlanadi, yaʼni ular $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ va undan yuqori oʻlchovli fazolarda ham bir xil amal qiladi.

Shu bilan birga, affin geometriyaning ayrim cheklovlari ham mavjud. Masalan, masofa va burchakni aniqlab boʻlmasligi baʼzi fizik yoki muhandislik masalalarida qoʻshimcha metrik struktura kiritishni talab qiladi. Bu esa Evklid geometriyasiga qaytishni zarur qiladi.

Umuman olganda, muhokama natijalari affin koordinatalar sistemasida metrik boʻlmagan geometrik xossalarni oʻrganish geometrik strukturalarni chuqurroq tushunish imkonini berishini koʻrsatdi. Ushbu yondashuv geometrik obyektlarni umumlashtirish, invariantlarni aniqlash va amaliy modellashtirishda samarali vosita sifatida xizmat qiladi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda affin koordinatalar sistemasida metrik boʻlmagan geometrik xossalar tizimli ravishda oʻrganildi hamda ularning affin akslantirishlar ostida saqlanish xususiyatlari aniqlashtirildi. Olingan natijalar shuni koʻrsatdiki, geometrik obyektlarning asosiy strukturaviy xossalari masofa va burchak tushunchalariga bogʻliq boʻlmagan holda ham toʻliq tavsiflanishi mumkin.

Shuningdek, tadqiqot affin geometriyaning nazariy va amaliy ahamiyatini tasdiqladi. U kompyuter grafika, robototexnika, mexanik modellashtirish va tasvirni qayta ishlash kabi sohalarda keng qoʻllanish imkoniyatiga ega. Ushbu yondashuv geometrik obyektlarni invariantlar orqali tahlil qilishga asoslangan samarali metodologiyani taqdim etadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole.
2. Kuratowski, K. (1968). *Topology, Volume II*. Academic Press.
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643

5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
6. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
7. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
8. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.