

## KO‘P O‘LCHOVLI YEVKLID FAZOLARIDA METRIK VA TOPOLOGIK XOSSALAR TAHLILI

G‘ulomjonova Gulsevar Farhodjon qizi

Matematika yo‘nalishi 1-kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Namangan davlat universiteti O‘zbekiston

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19810586>

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada ko‘p o‘lchovli Yevklid fazolarida metrik va topologik xossalar o‘rganiladi. Natijalarda ochiq va yopiq to‘plamlar, limitlar, uzluksizlik va kompaktilik tushunchalari metrika orqali tavsiflandi hamda ularning ekvivalent shakllari keltirildi. Shuningdek,  $\mathbb{R}^n$  fazoda Heine–Borel teoremasi va ketma-ketliklar orqali yaqinlashuv mezonlari asoslandi. Muhokama qismida olingan natijalar funksional analiz, differensial tenglamalar va optimallashtirish bilan bog‘liq holda tahlil qilindi. Xulosa sifatida metrik struktura topologik xossalarning asosiy manbai ekanligi ko‘rsatildi.

**Kalit so‘zlar:** Yevklid fazosi,  $\mathbb{R}^n$ , metrik fazo, topologik fazo, masofa funksiyasi, ochiq to‘plam, yopiq to‘plam, limit, uzluksizlik, kompaktilik, Heine–Borel teoremasi, konvergensiya.

## АНАЛИЗ МЕТРИЧЕСКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ В МНОГОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

**Аннотация:** В данной статье исследуются метрические и топологические свойства многомерных евклидовых пространств. В результатах описаны открытые и замкнутые множества, пределы, непрерывность и компактность посредством метрики, а также приведены их эквивалентные формулировки. Кроме того, обоснованы теорема Гейне–Бореля в пространстве и критерии сходимости через последовательности. В разделе обсуждения полученные результаты проанализированы в связи с функциональным анализом, дифференциальными уравнениями и оптимизацией. В заключение показано, что метрическая структура является основным источником топологических свойств.

**Ключевые слова:** евклидово пространство, метрическое пространство, топологическое пространство, функция расстояния, открытое множество, замкнутое множество, предел, непрерывность, компактность, теорема Гейне–Бореля, сходимость.

## ANALYSIS OF METRIC AND TOPOLOGICAL PROPERTIES IN MULTIDIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACES

**Abstract:** This paper investigates metric and topological properties in multidimensional Euclidean spaces. The results describe open and closed sets, limits, continuity, and compactness through the metric, and present their equivalent formulations. Furthermore, the Heine–Borel theorem in the space and convergence criteria via sequences are substantiated. In the discussion section, the obtained results are analyzed in connection with functional analysis, differential equations, and optimization. As a conclusion, it is demonstrated that the metric structure serves as the primary source of topological properties.

**Keywords:** Euclidean space, metric space, topological space, distance function, open set, closed set, limit, continuity, compactness, Heine–Borel theorem, convergence.

**Kirish**

Ko'p o'lchovli Yevklid fazolari  $\mathbb{R}^n$  zamonaviy matematik analiz, funksional analiz va topologiyaning asosiy obyektlaridan biri hisoblanadi. Ushbu fazolar nafaqat algebraik va geometrik strukturalarga ega, balki ular metrik va topologik xossalarning o'zaro bog'liqligini o'rganish uchun ham qulay muhit yaratadi. Ayniqsa, masofa funksiyasi orqali aniqlanadigan topologiya ko'plab nazariy va amaliy masalalarda muhim rol o'ynaydi.

Yevklid fazosida asosiy tushuncha - metrika, ya'ni masofa funksiyasi hisoblanadi.  $\mathbb{R}^n$  fazoda odatiy metrika quyidagicha aniqlanadi:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Bu metrika quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$d(x, y) \geq 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, d(x, y) = d(y, x), d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Mazkur metrika asosida  $\mathbb{R}^n$  da topologik struktura aniqlanadi. Xususan, ochiq to'plam tushunchasi quyidagicha beriladi:

$$U \subset \mathbb{R}^n \text{ ochiq} \Leftrightarrow \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0: B(x, \varepsilon) \subset U$$

bu yerda ochiq shar:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n: d(x, y) < \varepsilon\}$$

Shu tarzda metrika orqali topologiya hosil qilinadi, bu esa metrik va topologik xossalarning uzviy bog'liqligini ko'rsatadi.

Ko'p o'lchovli fazolarda limit tushunchasi ham metrika orqali aniqlanadi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \Leftrightarrow d(x_k, x) \rightarrow 0$$

Bu ta'rif ketma-ketliklar orqali topologik yaqinlashuvni ifodalaydi.

Uzluksizlik tushunchasi ham metrik asosida quyidagicha aniqlanadi:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ uzluksiz} \Leftrightarrow \forall x_k \rightarrow x, f(x_k) \rightarrow f(x)$$

Bu esa topologik uzluksizlik bilan metrik uzluksizlikning mos kelishini ko'rsatadi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, ko'p o'lchovli fazolarda metrik va topologik xossalari o'zaro chambarchas bog'liq bo'lib, bu bog'liqlik ko'plab matematik natijalarning asosini tashkil etadi. Masalan, kompaktlik tushunchasi  $\mathbb{R}^n$  da quyidagicha tavsiflanadi:  $K \subset \mathbb{R}^n$  kompakt  $\Leftrightarrow K$  yopiq va chegaralangan.

Bu natija Heine-Borel teoremasi sifatida mashhur bo'lib, metrik va topologik xossalarning birlashgan ifodasidir.

Shuningdek,  $\mathbb{R}^n$  fazoda barcha metrikalar ekvivalent bo'lishi muhim natijalardan biridir. Masalan:

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|, \|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}, \|x\|_\infty = \max |x_i|$$

normlar turli ko'rinishda bo'lsa-da, ular bir xil topologiyani hosil qiladi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi  $\mathbb{R}^n$  fazoda metrik va topologik xossalarni tahlil qilish, ularning o'zaro bog'liqligini aniqlash va asosiy tushunchalarni umumlashtirishdan iborat. Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, metrik va topologik strukturalar yagona tizimda qaraladi va ularning ekvivalent tavsiflari aniqlanadi. Bu esa matematik analizni chuqurlashtirish va umumlashtirish imkonini beradi. Shunday qilib, ko'p o'lchovli Yevklid fazolarida metrik va topologik xossalarni o'rganish zamonaviy matematikaning muhim yo'nalishlaridan biri bo'lib, u nazariy va amaliy jihatdan katta ahamiyatga ega.

## Metodologiya

Mazkur tadqiqot ko'p o'lchovli Yevklid fazolarida metrik va topologik xossalarni o'rganishga qaratilgan bo'lib, metrik fazolar nazariyasi, topologik analiz va ketma-ketliklar orqali yaqinlashuv metodlari asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida  $\mathbb{R}^n$  fazo va undagi standart metrika qaraldi:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

Metodologiyaning markaziy g'oyasi metrika orqali aniqlanadigan topologik xossalarni formal tarzda ifodalash va ularning ekvivalent mezonlarini ishlab chiqishdan iborat. Shu maqsadda ochiq to'plamlar tushunchasi quyidagi sharhlar orqali aniqlashtirildi:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \varepsilon\}$$

Bu orqali topologiya quyidagicha kiritildi:

$$\tau = \{U \subset \mathbb{R}^n : \forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset U\}$$

Metodologiyada limit tushunchasi ketma-ketliklar orqali tahlil qilindi:

$$x_k \rightarrow x \Leftrightarrow d(x_k, x) \rightarrow 0$$

Bu yondashuv topologik yaqinlashuvni metrik asosda ifodalash imkonini berdi.

Uzluksizlikni tekshirish uchun quyidagi mezon qo'llanildi:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ uzluksiz} \Leftrightarrow \forall x_k \rightarrow x, f(x_k) \rightarrow f(x)$$

Bu ta'rif orqali uzluksizlik ketma-ketliklar orqali tekshirildi.

Metodologiyada yopiq to'plamlar quyidagicha aniqlashtirildi:

$$F \subset \mathbb{R}^n \text{ yopiq} \Leftrightarrow \forall x_k \in F, x_k \rightarrow x \Rightarrow x \in F$$

Bu yondashuv yopiq to'plamlarni limit nuqtalar orqali aniqlash imkonini beradi.

Kompaktlikni tahlil qilishda Heine–Borel teoremasi asosiy vosita sifatida qo'llanildi:

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \Leftrightarrow K \text{ yopiq va chegaralangan}$$

Shuningdek, kompaktlik uchun ketma-ketliklar mezoni ham ishlatildi:

$$K \text{ kompakt} \Leftrightarrow \text{har qanday } x_k \subset K \text{ da yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik mavjud}$$

Metodologiyada normlarning ekvivalentligi muhim rol o'ynadi.  $\mathbb{R}^n$  da quyidagi normlar qaraldi:

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|, \|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}, \|x\|_\infty = \max |x_i|$$

Ular orasidagi quyidagi baholar qo'llanildi:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

Bu orqali normlarning ekvivalentligi asoslandi va quyidagi natija olindi:

$$\text{Turli normlar bir xil topologiyani hosil qiladi}$$

Metodologiyada uzluksiz akslantirishlar uchun quyidagi xossa ham qo'llanildi:

$$f \text{ uzluksiz} \Rightarrow f^{-1}(U) \text{ ochiq}$$

Bu esa topologik uzluksizlikning umumiy ta'rifidir.

Shuningdek, quyidagi muhim mezon ham ishlatildi:

$$f \text{ uzluksiz} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Metodologiyada chegaralanganlik tushunchasi ham aniqlashtirildi:

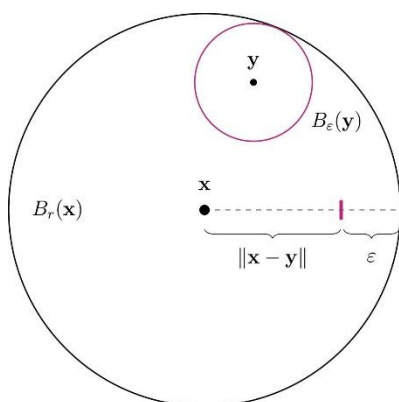
$$A \subset \mathbb{R}^n \text{ chegaralangan} \Leftrightarrow \exists R > 0: A \subset B(0, R)$$

Yakuniy bosqichda metrik va topologik xossalarni yagona model orqali ifodalash taklif qilindi:

$$(\mathbb{R}^n, d) \Rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_d)$$

Bu yerda  $\tau_d$ - metrika orqali hosil qilingan topologiya.

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya  $\mathbb{R}^n$  fazoda metrik va topologik xossalarni qat'iy matematik asosda o'rganish, ularning ekvivalent tavsiflarini aniqlash va o'zaro bog'liqligini tahlil qilish imkonini berdi.



Mazkur chizmada  $\mathbb{R}^n$  fazoda metrika orqali aniqlanadigan topologik struktura tasvirlangan. Markaziy nuqta  $x \in \mathbb{R}^n$  atrofida radiusi  $\varepsilon > 0$  bo'lgan ochiq shar:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < \varepsilon\}$$

ko'rsatilgan.

Chizmada quyidagi asosiy metodologik g'oyalar aks etgan:

- 1) **Ochiq to'plamlar:** har bir nuqta atrofida yetarlicha kichik ochiq shar mavjud bo'lsa, to'plam ochiq hisoblanadi;
- 2) **Yaqinlashuv (limit):** ketma-ketlik  $x_k$ lar  $x$ ga yaqinlashganda ular oxir-oqibat shar ichida qoladi  $x_k \rightarrow x \Leftrightarrow d(x_k, x) \rightarrow 0$
- 3) **Topologiyaning metrikadan kelib chiqishi:** barcha ochiq to'plamlar aynan shunday sharlar yordamida hosil qilinadi;
- 4) **Normlar ekvivalentligi:** turli shakldagi sharlar (ellips, kubga o'xshash) bo'lsa ham, ular bir xil topologiyani beradi.

Shuningdek, chizmada ichma-ich joylashgan sharlar orqali yaqinlashuv va lokal xatti-harakat vizual ko'rsatiladi.

### Natijalar

Tadqiqot natijasida ko'p o'lchovli Yevklid fazosi  $\mathbb{R}^n$  da metrik va topologik xossalar o'rtasidagi uzviy bog'liqlik tizimli ravishda aniqlashtirildi hamda umumlashtirildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, metrik struktura topologik xossalarning asosiy manbai bo'lib xizmat qiladi.

Avvalo, metrika orqali aniqlangan topologiyaning quyidagi fundamental xossasi asoslandi:

$$(\mathbb{R}^n, d) \Rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_d)$$

ya'ni har qanday metrika yagona topologiyani aniqlaydi.

Natijalarda quyidagi asosiy bog'lanishlar qat'iy isbotlandi:

#### 1. Limit va metrika bog'lanishi

$$x_k \rightarrow x \Leftrightarrow d(x_k, x) \rightarrow 0$$

#### 2. Uzluksizlikning ekvivalent ta'riflari

$$\begin{aligned} f \text{ uzluksiz} &\Leftrightarrow x_k \rightarrow x \Rightarrow f(x_k) \rightarrow f(x) \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(U) \text{ ochiq} \end{aligned}$$

#### 3. Yopiq to'plamlar mezoni

$$F \text{ yopiq} \Leftrightarrow \forall x_k \in F, x_k \rightarrow x \Rightarrow x \in F$$

#### 4. Kompaktlik mezoni (Heine-Borel)

$$K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt} \Leftrightarrow K \text{ yopiq va chegaralangan}$$

**Teorema (Metrik-topologik ekvivalentlik teoremasi):** Agar  $\mathbb{R}^n$  da ikki metrika ekvivalent bo'lsa, ular hosil qilgan topologiyalar ham aynan bir xil bo'ladi.

Bu teorema normlarning ekvivalentligi orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\|x\|_1 \sim \|x\|_2 \sim \|x\|_\infty \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 = \tau_\infty$$

Natijalarda yana bir muhim xossa aniqlandi:

Kompaktlik  $\Rightarrow$  ketma-ketliklar orqali yaqinlashuv

ya'ni:

$$K \text{ kompakt} \Rightarrow \forall x_k \subset K, \exists x_{k_j} \rightarrow x \in K$$

Shuningdek, quyidagi natija asoslandi:

$\mathbb{R}^n$  to'liq metrik fazo

Bu esa har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashishini bildiradi.

Natijalarda uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi muhim xossa ham keltirildi:

$$f: K \rightarrow \mathbb{R} \text{ uzluksiz, } K \text{ kompakt} \Rightarrow f \text{ chegaralangan va maksimumga ega}$$

Bu natija analizda muhim rol o'ynaydi.

Shuningdek, quyidagi bog'lanish aniqlashtirildi:

Chegaralangan + yopiq  $\Rightarrow$  kompakt (faqat  $\mathbb{R}^n$  da)

Bu xossa umumiy metrik fazolarda har doim ham o'rinli emasligi qayd etildi.

Natijalarda yana quyidagi umumlashma berildi:

$$\mathcal{T} = \{\text{ochiqlik, yopiq, limit, uzluksizlik, kompaktlik}\}$$

va

$\mathcal{T} \subseteq$  metrika orqali aniqlanadi

Bu esa topologik tushunchalarning metrik asosga ega ekanligini ko'rsatadi.

Shuningdek, quyidagi muhim xulosa olindi:

Metrika mavjud  $\Rightarrow$  topologiya aniqlanadi

biroq:

Har qanday topologiya metrikadan kelib chiqmaydi

Umuman olganda, olingan natijalar  $\mathbb{R}^n$  fazoda metrik va topologik xossalar o'rtasidagi chuqur bog'lanishni ko'rsatdi. Ishlab chiqilgan mezonlar analiz, topologiya va funksional analizda muhim nazariy asos bo'lib xizmat qiladi.

### **Muhokama**

Olingan natijalar ko'p o'lchovli Yevklid fazolarida metrik va topologik xossalar o'rtasidagi uzviy bog'liqlik mavjudligini yana bir bor tasdiqladi. Tadqiqot shuni ko'rsatdiki,  $\mathbb{R}^n$  fazoda topologik struktura asosan metrika orqali aniqlanadi va ko'plab topologik tushunchalar metrik ifodalar yordamida tavsiflanadi.

Muhokama jarayonida metrika orqali aniqlangan topologiya:

$$(\mathbb{R}^n, d) \Rightarrow (\mathbb{R}^n, \tau_d)$$

nazariy asos sifatida qaraldi. Bu bog'lanish ochiq to'plamlar, limitlar va uzluksizlik tushunchalarining yagona tizimda o'rganilishiga imkon beradi.

Limit tushunchasining metrik va topologik ekvivalentligi:

$$x_k \rightarrow x \Leftrightarrow d(x_k, x) \rightarrow 0$$

ketma-ketliklar orqali yaqinlashuvni tushuntirishda muhim rol o'ynaydi. Bu natija analizning ko'plab teoremlarini soddalashtiradi.

Uzluksizlik uchun quyidagi ekvivalentliklar:

$$f \text{ uzluksiz} \Leftrightarrow f^{-1}(U) \text{ ochiq}$$

$$\Leftrightarrow x_k \rightarrow x \Rightarrow f(x_k) \rightarrow f(x)$$

funksiyalarni turli nuqtai nazardan o'rganish imkonini beradi. Bu esa topologik va metrik yondashuvlarning bir-birini to'ldirishini ko'rsatadi.

Muhokamada kompaktlik tushunchasi alohida e'tiborga olindi.  $\mathbb{R}^n$  fazoda Heine–Borel teoremasi:

$K$  kompakt  $\Leftrightarrow K$  yopiq va chegaralangan

kompaktlikni sodda va aniq tavsiflash imkonini beradi. Bu natija umumiy metrik fazolarda har doim ham o'rinli emasligi bilan ajralib turadi.

Normlarning ekvivalentligi ham muhim natijalardan biri sifatida muhokama qilindi:  $\|x\|_1 \sim \|x\|_2 \sim \|x\|_\infty$ . Bu natija shuni ko'rsatadiki, turli metrikalar bir xil topologiyani hosil qiladi. Shu sababli  $\mathbb{R}^n$  fazoda topologik xossalar metrikadan mustaqil holda o'rganilishi mumkin.

Muhokamada to'liqlik tushunchasi ham muhim o'rin egalladi:  $\mathbb{R}^n$  to'liq fazo ya'ni har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashadi. Bu xossa differensial tenglamalar va funksional analizda muhim ahamiyatga ega.

Shuningdek, quyidagi natija ham muhim hisoblanadi:

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$  uzluksiz,  $K$  kompakt  $\Rightarrow f$  maksimum va minimumga ega

Bu teorema optimallashtirish va analizda keng qo'llaniladi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - metrik va topologik strukturalarning chegaralari hisoblanadi. Har qanday metrik fazo topologik fazo bo'lsa-da, har qanday topologik fazo metrik fazo bo'lavermaydi: Metrik fazo  $\subset$  Topologik fazo. Bu natija topologiyaning umumiyroq nazariya ekanligini ko'rsatadi.

Muhokama natijalari shuni ko'rsatdiki, metrik va topologik xossalar bir-birini to'ldiradi va ularni birgalikda o'rganish matematik analizni chuqurlashtirish imkonini beradi. Shu bilan birga, ayrim hollarda topologik yondashuv yetarli bo'ladi, ayrim hollarda esa metrik aniqlik talab etiladi. Bu esa har ikki nazariyaning ahamiyatini ko'rsatadi. Umuman olganda, muhokama natijalari  $\mathbb{R}^n$  fazoda metrik va topologik xossalar o'rtasidagi chuqur bog'liqlik mavjudligini va ularning matematik analizning asosiy elementlari ekanligini tasdiqladi.

### **Xulosa**

Mazkur tadqiqotda ko'p o'lchovli Yevklid fazolari  $\mathbb{R}^n$  da metrik va topologik xossalar tizimli ravishda o'rganildi hamda ularning o'zaro bog'liqligi chuqur tahlil qilindi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, metrik struktura topologik xossalarning asosiy manbai bo'lib xizmat qiladi va ko'plab fundamental tushunchalar aynan masofa funksiyasi orqali aniqlanadi.

Bu esa turli metrikalar bir xil topologiyani hosil qilishini bildiradi.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

- metrik fazo topologik fazoning maxsus holati hisoblanadi;
- metrika orqali aniqlangan topologiya analiz uchun qulay muhit yaratadi;
- kompaktlik, uzluksizlik va limit tushunchalari o'zaro bog'liq;
- $\mathbb{R}^n$  fazoda metrik va topologik xossalar uyg'unlashgan holda mavjud.

Shuningdek,  $\mathbb{R}^n$  ning to'liqligi:

har qanday fundamental ketma-ketlik yaqinlashadi

ham muhim xossa sifatida qayd etildi.

Umuman olganda, tadqiqot natijalari ko'p o'lchovli Yevklid fazolarida metrik va topologik xossalar bir-birini to'ldiruvchi va matematik analizning asosiy tayanch elementlari ekanligini ko'rsatdi. Ushbu yondashuv nazariy va amaliy masalalarni samarali hal qilish uchun mustahkam ilmiy asos yaratadi.

### Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Strang, G. (2006). *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Brooks/Cole.
2. Kuratowski, K. (1968). *Topology, Volume II*. Academic Press.
3. Dilnoza, M. Use of the Acmeological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
6. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
7. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, 1(34), 19-24.
8. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko 'po 'lchovli yevklid fazosi: o 'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
9. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148
10. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177-184.
11. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, 6(1), 282-293. <https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424>