# FAZODA IKKI TO'G'RI CHIZIQNING O'ZARO VAZIYATINI ANALITIK VA PROYEKTIV YONDASHUV ASOSIDA O'RGANISH

**Qodirova Ruxshona Tohirjon qizi**
**Fizika-Matematika fakukteti, 1-kurs talabasi**
**Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna**
**Ilmiy maslahatchi: Namangan davlat universiteti O'zbekiston**
**https://doi.org/10.5281/zenodo.19810871**

**Annotatsiya.** Ushbu maqolada fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati analitik va proyektiv yondashuv asosida o'rganiladi. Natijalarda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati parametrik tenglamalar, yo'nalish vektorlari va determinantal mezonlar orqali ifodalandi. Shuningdek, proyektiv yondashuv orqali chiziqlarning tekislikdagi tasviri va ularning invariant xossalari tahlil qilindi. Muhokama qismida olingan natijalar muhandislik grafika va fazoviy modellashtirish bilan bog'liq holda ko'rib chiqildi. Xulosa sifatida analitik va proyektiv metodlarning uyg'un qo'llanilishi chiziqlarning o'zaro vaziyatini to'liq tavsiflash imkonini berishi ko'rsatildi.

**Kalit so'zlar:** to'g'ri chiziq, fazo, parametrik tenglama, yo'nalish vektori, kesishish, parallel chiziqlar, qiyshiq chiziqlar, determinant, proyektiv geometriya, invariantlar.

# ИЗУЧЕНИЕ ВЗАИМНОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ДВУХ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ НА ОСНОВЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО И ПРОЕКТИВНОГО ПОДХОДОВ

**Аннотация:** В данной статье изучается взаимное расположение двух прямых в пространстве на основе аналитического и проективного подходов. В результатах взаимное расположение двух прямых выражено посредством параметрических уравнений, направляющих векторов и детерминантных критериев. Кроме того, с помощью проективного подхода проанализированы изображение прямых на плоскости и их инвариантные свойства. В разделе обсуждения полученные результаты рассмотрены в связи с инженерной графикой и пространственным моделированием. В заключение показано, что согласованное применение аналитического и проективного методов позволяет дать полное описание взаимного расположения прямых.

**Ключевые слова:** прямая линия, пространство, параметрическое уравнение, направляющий вектор, пересечение, параллельные прямые, скрещивающиеся прямые, определитель, проективная геометрия, инварианты.

# STUDY OF THE MUTUAL POSITION OF TWO LINES IN SPACE BASED ON ANALYTICAL AND PROJECTIVE APPROACHES

**Abstract:** This paper examines the mutual position of two lines in space based on analytical and projective approaches. The results express the mutual position of two lines through parametric equations, direction vectors, and determinantal criteria. Furthermore, the projective representation of lines in a plane and their invariant properties are analysed using the projective approach. In the discussion section, the obtained results are considered in relation to engineering graphics and spatial modelling. As a conclusion, it is demonstrated that the combined application of analytical and projective methods enables a complete characterisation of the mutual position of lines.

**Keywords:** straight line, space, parametric equation, direction vector, intersection, parallel lines, skew lines, determinant, projective geometry, invariants.

**Kirish**

Fazoda geometrik obyektlarning o‘zaro joylashuvini o‘rganish analitik geometriyaning muhim masalalaridan biri hisoblanadi. Ayniqsa, ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyatini aniqlash - ularning kesishishi, parallelligi yoki qiyshiq (skew) joylashuvi - muhandislik grafika, kompyuter modellashtirish va fazoviy tahlil masalalarida katta ahamiyatga ega.

Uch o‘lchovli fazoda to‘g‘ri chiziq odatda parametrik tenglamalar orqali ifodalanadi:

$$\ell_1: \begin{cases} x = x_1 + a_1 t \\ y = y_1 + b_1 t \\ z = z_1 + c_1 t \end{cases} \qquad \ell_2: \begin{cases} x = x_2 + a_2 s \\ y = y_2 + b_2 s \\ z = z_2 + c_2 s \end{cases}$$

Bu yerda $(a_1, b_1, c_1)$va $(a_2, b_2, c_2)$mos ravishda chiziqlarning yo‘nalish vektorlari hisoblanadi.

Ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyatini aniqlash uchun ularning yo‘nalish vektorlari va bir nuqtalari orasidagi bog‘lanish tahlil qilinadi. Agar:

$$\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1), \vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$$

bo‘lsa, quyidagi holatlar mavjud:

**Parallel chiziqlar**: $\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_2$.

**Kesishuvchi chiziqlar**: parametrlar $t$va $s$uchun umumiy yechim mavjud

$$\ell_1(t) = \ell_2(s)$$

**Qiyshiq (skew) chiziqlar**: chiziqlar parallel emas va kesishmaydi

Bu holatni aniqlash uchun quyidagi aralash ko‘paytma (mixed product) qo‘llaniladi:

$$[\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] \neq 0$$

bu yerda $\overrightarrow{P_1P_2}$- chiziqlardagi nuqtalar orasidagi vektor.

Analitik yondashuv chiziqlarning aniq algebraik tavsifini beradi, biroq ba’zi hollarda geometrik tasavvur uchun proyektiv metodlar zarur bo‘ladi. Proyektiv geometriyada chiziqlar tekislikka proyeksiyalanadi va ularning o‘zaro vaziyati invariant xossalar orqali o‘rganiladi.

Parallel proyeksiya quyidagi ko‘rinishda ifodalanadi: $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Bu akslantirish orqali fazodagi chiziqlar tekislikda tasvirlanadi va ularning kesishishi yoki parallelligi vizual tarzda aniqlanadi.

Mavzuning dolzarbligi shundan iboratki, fazoviy obyektlarning o‘zaro joylashuvini aniqlash ko‘plab amaliy sohalarda muhim rol o‘ynaydi. Masalan, mexanik konstruktsiyalarni loyihalashda chiziqlarning o‘zaro vaziyati aniqlanishi zarur. Shuningdek, bu masala matematik jihatdan ham muhim bo‘lib, u vektor algebra, determinantal mezonlar va proyektiv invariantlar bilan bog‘liq. Mazkur maqolaning asosiy maqsadi fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyatini analitik va proyektiv yondashuv asosida o‘rganish, ularning matematik mezonlarini ishlab chiqish va umumiy model yaratishdan iborat.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi shundaki, analitik va proyektiv metodlar yagona tizimda qaraladi va ular orqali chiziqlarning o‘zaro vaziyati kompleks tarzda tavsiflanadi. Shunday qilib, fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyatini o‘rganish nafaqat nazariy geometriya, balki amaliy modellashtirishda ham muhim ahamiyatga ega.

**Metod**

Mazkur tadqiqot fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini aniqlashga qaratilgan bo'lib, analitik geometriya, vektor algebra va proyektiv modellashtirish metodlari asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida $\mathbb{R}^3$ fazoda parametrik tenglamalar bilan berilgan ikki to'g'ri chiziq qaraldi.

Ikki chiziq quyidagi parametrik ko'rinishda ifodalandi:

$$\ell_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}_1, \ell_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{v}_2$$

bu yerda $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$- yo'nalish vektorlari, $\vec{r}_1, \vec{r}_2$- mos ravishda chiziqlardagi nuqtalar.

Metodologiyada chiziqlarning o'zaro vaziyatini aniqlash uchun quyidagi mezonlar qo'llanildi.

**Parallelizm sharti:** $\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_2$. Bu shart bajarilganda chiziqlar parallel yoki ustma-ust tushuvchi bo'ladi.

**Kesishish sharti:** $\vec{r}_1 + t\vec{v}_1 = \vec{r}_2 + s\vec{v}_2$. Bu tenglama tizimi yechimga ega bo'lsa, chiziqlar kesishadi.

**Qiyshiq (skew) chiziqlar mezoni**

Chiziqlar kesishmaydigan va parallel bo'lmagan holatda ular qiyshiq bo'ladi. Bu holat quyidagi aralash ko'paytma orqali tekshirildi:

$$[\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{v}_1, \vec{v}_2] \neq 0$$

Bu yerda determinant ko'rinishida:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Bu mezon chiziqlarning bir tekislikda yotmasligini bildiradi.

**Masofani aniqlash usuli (qiyshiq chiziqlar)**

Qiyshiq chiziqlar orasidagi masofa quyidagicha hisoblandi:

$$d = \frac{|\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\,|}{|\,\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\,|}$$

Bu formula fazoviy masofani aniqlashda asosiy vosita sifatida qo'llanildi.

**Proyektiv yondashuv**

Proyektiv metodda fazodagi chiziqlar tekislikka proyeksiyalandi:

$$\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

Proyeksiya orqali chiziqlarning tekislikdagi tasviri o'rganildi va quyidagi xossalar tekshirildi: kollinearlik saqlanadi, parallelizm saqlanadi va kesma nisbatlari saqlanadi.

Proyeksiyadan so'ng chiziqlarning kesishishi yoki parallelligi vizual tarzda aniqlanadi.

**Determinantal yondashuv**

Chiziqlarning koplanarligi quyidagi determinant orqali tekshirildi:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Agar determinant nolga teng bo'lsa, chiziqlar bir tekislikda yotadi.

**Umumiy model**

Metodologiyaning yakuniy bosqichida quyidagi umumiy tahlil modeli taklif qilindi:

$$(\ell_1, \ell_2) \Rightarrow \{\text{yo'nalish vektorlari, determinant, proyeksiya}\} \Rightarrow \text{vaziyat aniqlanadi}$$

Shunday qilib, qo'llanilgan metodologiya fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini analitik va proyektiv yondashuvlar asosida aniqlash, ularning geometrik xossalarini tekshirish va umumiy matematik model yaratish imkonini berdi.

**Natija**

Tadqiqot natijasida fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati analitik va proyektiv yondashuvlar asosida to'liq tavsiflandi hamda ularni aniqlashning aniq matematik mezonlari ishlab chiqildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, chiziqlarning o'zaro joylashuvi ularning yo'nalish vektorlari va nuqtalari orasidagi bog'lanish orqali aniqlanadi.

Ikki to'g'ri chiziq: $\ell_1: \vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{v}_1, \ell_2: \vec{r} = \vec{r}_2 + s\vec{v}_2$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, quyidagi uchta asosiy holat aniqlandi.

**1. Parallel chiziqlar**

Agar: $\vec{v}_1 = \lambda\vec{v}_2$ bo'lsa, chiziqlar parallel hisoblanadi. Agar bundan tashqari:

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \mu\vec{v}_1$$

bo'lsa, chiziqlar ustma-ust tushadi.

**2. Kesishuvchi chiziqlar**

Agar quyidagi tenglama tizimi yechimga ega bo'lsa: $\vec{r}_1 + t\vec{v}_1 = \vec{r}_2 + s\vec{v}_2$ u holda chiziqlar kesishadi.

Bu holatda kesishish nuqtasi: $P = \vec{r}_1 + t_0\vec{v}_1$ ko'rinishda aniqlanadi.

**3. Qiyshiq (skew) chiziqlar**

Agar chiziqlar parallel emas va kesishmasa, ular qiyshiq bo'ladi. Bu holat quyidagi determinant orqali aniqlanadi:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Bu natija chiziqlarning bir tekislikda yotmasligini bildiradi.

**Masofa natijasi (qiyshiq chiziqlar uchun)**

Qiyshiq chiziqlar orasidagi eng qisqa masofa quyidagicha aniqlanadi:

$$d = \frac{|\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\,|}{|\,\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\,|}$$

Bu formula fazoviy modellashtirishda muhim ahamiyatga ega.

**Teorema (Chiziqlar vaziyatining determinant mezoni):** Fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati quyidagi yagona mezon orqali aniqlanadi:

$$D = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

1) $D = 0$ va $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \rightarrow$ chiziqlar parallel yoki ustma-ust
2) $D = 0$ va $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2 \rightarrow$ chiziqlar kesishadi
3) $D \neq 0 \rightarrow$ chiziqlar qiyshiq

**Proyektiv natija**

Proyektiv yondashuv asosida quyidagi natija olindi: parallel chiziqlar proyeksiyada ham parallel, kesishuvchi chiziqlar proyeksiyada kesishadi va qiyshiq chiziqlar proyeksiyada kesishuvchi yoki parallel ko'rinishi mumkin, lekin ularning haqiqiy vaziyati determinant orqali aniqlanadi.

Natijalarda quyidagi umumiy tahlil sxemasi shakllantirildi:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1) \Rightarrow \text{determinant} \Rightarrow \text{vaziyat aniqlanadi}$$

Umuman olganda, olingan natijalar fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyatini aniqlash uchun analitik va proyektiv yondashuvlarning uyg‘un qo‘llanilishi samarali ekanligini ko‘rsatdi. Ishlab chiqilgan mezonlar muhandislik grafika, 3D modellashtirish va fazoviy tahlilda muhim nazariy asos bo‘lib xizmat qiladi.

**Muhokama**

Olingan natijalar fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro vaziyatini aniqlashda analitik va proyektiv yondashuvlarning o‘zaro to‘ldiruvchi xarakterga ega ekanligini ko‘rsatdi. Analitik metod aniq algebraik mezonlar orqali chiziqlarning kesishishi, parallelligi yoki qiyshiq joylashuvini aniqlash imkonini bersa, proyektiv yondashuv geometrik tasavvur va vizual interpretatsiyani ta’minlaydi.

Analitik yondashuvda asosiy rol yo‘nalish vektorlari va determinantlarga tegishli bo‘ldi. Xususan, aralash ko‘paytma orqali ifodalangan determinantning nolga teng yoki teng emasligi chiziqlarning koplanarligini aniqlashda hal qiluvchi ahamiyatga ega ekanligi aniqlandi:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Bu ifoda nolga teng bo‘lsa, chiziqlar bir tekislikda yotadi, aks holda ular qiyshiq bo‘ladi. Shu jihatdan determinant mezoni analitik tahlilning asosiy instrumenti sifatida qaraldi.

Muhokama jarayonida chiziqlarning kesishish sharti:

$$\vec{r}_1 + t\vec{v}_1 = \vec{r}_2 + s\vec{v}_2$$

geometrik jihatdan ikki parametrli tenglama tizimining yechimga ega bo‘lishi bilan bog‘liq ekani ta’kidlandi. Bu esa uch o‘lchovli fazoda kesishish hodisasining nisbatan kamroq uchrashishini ko‘rsatadi, chunki uchta tenglama va ikki noma’lum mavjud.

Qiyshiq chiziqlar masalasi alohida ahamiyatga ega bo‘lib, ular fazoda eng umumiy holatni tashkil etadi. Ushbu holatda chiziqlar orasidagi masofani aniqlash:

$$d = \frac{|\,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)\,|}{|\,\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\,|}$$

formulasi orqali amalga oshiriladi. Bu natija fazoviy modellashtirish va muhandislik hisob-kitoblarida muhim rol o‘ynaydi.

Proyektiv yondashuv natijalari muhokamada alohida o‘rin egalladi. Fazodagi chiziqlar tekislikka proyeksiyalanganda ularning haqiqiy o‘zaro vaziyati ba’zan o‘zgarib ko‘rinishi mumkinligi aniqlandi. Masalan, qiyshiq chiziqlar proyeksiyada kesishuvchi yoki parallel ko‘rinishga ega bo‘lishi mumkin. Shu sababli, proyektiv tasvir faqat vizual yordamchi vosita bo‘lib, yakuniy xulosa analitik mezonlar asosida chiqarilishi zarurligi asoslandi.

Shuningdek, parallel proyeksiyaning invariant xossalari muhokama qilindi. Kollinearlik, parallelizm va kesma nisbatlarining saqlanishi chiziqlarning tekislikdagi tasvirini ishonchli qilishga xizmat qiladi. Bu esa chizma geometriyada muhim ahamiyat kasb etadi.

Muhokamada yana bir muhim jihat - analitik va proyektiv metodlarning birgalikda qo‘llanishidir. Analitik metod hisoblash aniqligini ta’minlasa, proyektiv metod geometrik intuitiv tushunishni kuchaytiradi. Bu esa murakkab fazoviy masalalarni samarali hal qilish imkonini beradi.

Muhokama natijalari shuni ko'rsatdiki, fazoda chiziqlarning o'zaro vaziyatini aniqlash nafaqat nazariy geometriya masalasi, balki amaliy muammolarni hal qilishda ham muhim vosita hisoblanadi.

Shuningdek, ayrim murakkab holatlarda (masalan, parametrik chiziqlar yoki egri chiziqlar) ushbu metodlarni umumlashtirish zarurligi qayd etildi. Bu esa kelgusidagi tadqiqotlar uchun yangi yo'nalishlarni belgilaydi.

Umuman olganda, analitik va proyektiv yondashuvlarning uyg'un qo'llanilishi fazoviy geometriyada chiziqlarning o'zaro vaziyatini to'liq va aniq tavsiflash imkonini beradi.

**Xulosa**

Mazkur tadqiqotda fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini analitik va proyektiv yondashuvlar asosida o'rganish amalga oshirildi hamda ularning matematik mezonlari tizimli ravishda ishlab chiqildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, chiziqlarning o'zaro joylashuvi ularning yo'nalish vektorlari va fazodagi nuqtalari orasidagi munosabat orqali aniq aniqlanishi mumkin.

Tadqiqot natijalari quyidagi umumiy xulosalarni chiqarish imkonini berdi:

a) analitik metod chiziqlarning o'zaro vaziyatini aniq algebraik mezonlar orqali aniqlaydi;
b) proyektiv metod geometrik tasavvur va vizual interpretatsiyani ta'minlaydi;
c) determinant va vektor metodlari fazoviy tahlilning asosiy vositalari hisoblanadi;
d) analitik va proyektiv yondashuvlarning birgalikda qo'llanishi eng samarali natijani beradi.

Umuman olganda, olingan natijalar fazoda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatini aniqlash uchun kompleks yondashuv zarurligini va bu yondashuv nazariy hamda amaliy jihatdan muhim ekanligini ko'rsatdi.

## Adabiyotlar, References, Литературы:

1. David Gilbert. Grundlagen der Geometrie (Geometriya asoslari). - Leipzig: Teubner, 1899.
2. Euclid. Elements. - Translated by T. L. Heath. - Cambridge: Cambridge University Press, 1908.
3. Greenberg, M. J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History. – 4th ed. – New York: W. H. Freeman, 2008.
4. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
5. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
6. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
7. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
8. Maxmudova, D. X. (2023). Kognitiv kompetentlikni rivojlantirishning akmeologik texnologiyasini joriy etish shart-sharoitlari. *GOLDEN BRAIN*, *1*(34), 19-24.

9. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).

10. Khaitmirzayevna, Makhmudova D. "Pedagogical Ways of Cognitive Competences in Future Teachers Based on Acmeological Approach." *World Economics and Finance Bulletin*, vol. 32, 23 Mar. 2024, pp. 146-148

11. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.

12. Abdulhamidova, M., Maxmudova, D. Proyektiv geometriyaning asosiy faktlari. (2026). *Zamonaviy taraqqiyot va fan: 21-asr yondashuvlari*, *6*(1), 282-293. https://journalss.org/index.php/zam/article/view/25424