TOPOLOGIK FAZOLARDA ICHKI, CHEGARAVIY VA LIMIT NUQTALAR: OPERATORLI YONDASHUV VA YANGI STRUKTURAVIY NATIJALAR

Axmadjonova Zebona Xasanboy qizi
NamDU, Fizika-matematika fakulteti
Matematika yo‘nalishi, 1-kurs talabasi
Ilmiy rahbar: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzayevna
https://doi.org/10.5281/zenodo.19758190

Annotatsiya: Ushbu maqolada umumiy topologiyaning asosiy tushunchalari - ichki nuqta, chegaraviy nuqta va urinish nuqtasi - operatorli yondashuv asosida yagona nazariy tizim sifatida qayta tahlil qilinadi. Metodologiya sifatida aksiomatik-deduktiv yondashuv, operatorlar algebraasi hamda metrik fazolardagi interpretatsiyalar qo‘llanildi. Natijalarda klassik tengliklar chuqurlashtirilib, chegara tushunchasini limit nuqtalar va komplement yopilmasi orqali ifodalovchi yangi mualliflik teorema keltirildi. Shuningdek, fazoning ichki, chegaraviy va tashqi qismlarga ajralishi umumlashtirilib, topologik strukturaning lokal modeli taklif etildi.

Kalit so‘zlar: umumiy topologiya, ichki nuqta, chegaraviy nuqta, urinish nuqtasi, limit nuqta.

ВНУТРЕННИЕ, ГРАНИЧНЫЕ И ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ: ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД И НОВЫЕ СТРУКТУРНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Аннотация: В данной статье основные понятия общей топологии - внутренняя точка, граничная точка и точка прикосновения - подвергаются повторному анализу как единая теоретическая система на основе операторного подхода. В качестве методологии использовались аксиоматико-дедуктивный подход, алгебра операторов и интерпретации в метрических пространствах. В результатах были углублены классические равенства и представлена новая авторская теорема, выражающая понятие границы через предельные точки и замыкание дополнения. Также обобщено разделение пространства на внутреннюю, граничную и внешнюю части, и предложена локальная модель топологической структуры.

Ключевые слова: общая топология, внутренняя точка, граничная точка, точка прикосновения, предельная точка.

INTERIOR, BOUNDARY, AND LIMIT POINTS IN TOPOLOGICAL SPACES: AN OPERATOR APPROACH AND NEW STRUCTURAL RESULTS

Abstract: In this article, the fundamental concepts of general topology-interior point, boundary point, and point of adherence-are re-analyzed as a unified theoretical system based on an operator approach. The methodology employs an axiomatic-deductive approach, operator algebra, and interpretations in metric spaces. The results deepen classical equalities and introduce a new original theorem expressing the concept of the boundary through limit points and the closure of the complement. Furthermore, the decomposition of space into interior, boundary, and exterior parts is generalized, and a local model of the topological structure is proposed.

Keywords: general topology, interior point, boundary point, point of adherence, limit point.

Kirish

Topologiya matematikaning eng umumlashgan boʻlimlaridan biri boʻlib, u fazodagi nuqtalar oʻrtasidagi yaqinlik, uzluksizlik va limit tushunchalarini masofaga bogʻliq boʻlmagan holda oʻrganadi. Agar klassik geometriya masofa va burchaklarga, matematik analiz esa funksiyalarning oʻzgarishiga tayanadigan boʻlsa, umumiy topologiya bu tushunchalarni ochiq toʻplamlar tizimi orqali aksiomatik asosda ifodalaydi. Shu sababli topologik fazo (X,τ) va undagi qism toʻplamlarning lokal xossalarini tavsiflovchi tushunchalar nazariyaning markaziy qismini tashkil etadi.

Topologik fazoda $A \subset X$ qism toʻplamning ichki, chegaraviy va urinish nuqtalari uning fazodagi "geometrik xulq-atvori"ni formal tilda ifodalash imkonini beradi. Ushbu tushunchalar quyidagi asosiy operatorlar orqali aniqlanadi:

$$\operatorname{Int}(A) = \bigcup_{\substack{U\in\tau \\ U\subset A}} U$$

$$\operatorname{cl}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ yopiq} \\ A\subset F}} F$$

$$\partial A = \operatorname{cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A)$$

$$A' = \{x \in X: \forall U(x), (U(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$$

Mazkur operatorlar birgalikda toʻplamning ichki tuzilmasi, tashqi chegaralari hamda limit xususiyatlarini aniqlashda asosiy vosita sifatida xizmat qiladi. Shuni alohida ta'kidlash lozimki, bu tushunchalar faqat geometrik obyektlarga emas, balki istalgan abstrakt fazoga nisbatan ham qoʻllanadi, bu esa topologiyaning universalligini ta'minlaydi.

Ichki nuqta tushunchasi fazodagi lokal barqarorlikni ifodalaydi. Agar
$x \in \operatorname{Int}(A)$ boʻlsa, u holda shunday ochiq atrof mavjudki:

$$x \in U \subset A$$

Bu esa intuitiv jihatdan $x$nuqta "toʻliq A ichida joylashgan"ligini bildiradi. Aksincha, agar $\operatorname{Int}(A) = \emptyset$ boʻlsa, bu A toʻplam qanchalik katta boʻlmasin, unda sof ichki hudud mavjud emasligini koʻrsatadi. Bu hodisa ayniqsa zich, lekin "yupqa" toʻplamlarda, masalan, ratsional sonlar toʻplamida kuzatiladi.

Chegaraviy nuqta tushunchasi esa toʻplam va uning komplementi oʻrtasidagi oʻtish zonasini ifodalaydi. Formal ravishda:

$$x \in \partial A \iff \forall U(x),\ U(x) \cap A \neq \emptyset \ \wedge\ U(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

Demak, chegara nuqtasi har qanday kichik atrofda ham A, ham uning komplementi bilan kesishadi. Bu esa chegaraning sof geometrik "qirra" emas, balki lokal tutashuv hodisasi ekanini koʻrsatadi.

Urinish nuqtasi (limit nuqta) tushunchasi esa yaqinlashuvning statik ifodasidir. Agar $x \in A'$ boʻlsa, u holda A dan olingan nuqtalar ketma-ketligi $x$ga yaqinlashishi mumkin. Metrik fazolarda bu quyidagicha ifodalanadi:

$$x \in A' \iff \forall r > 0,\ (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Bu tushuncha analizdagi limit, uzluksizlik va kompaktlik kabi asosiy gʻoyalar bilan bevosita bogʻliq.

Mazkur uch tushuncha o'zaro mustaqil emas, balki yagona operatorlar tizimini tashkil etadi. Xususan, ular orasida quyidagi muhim bog'lanishlar mavjud:

$$\mathrm{cl}\,(A) = A \cup A'$$

$$\partial A = \mathrm{cl}\,(A) \cap \mathrm{cl}\,(X \setminus A)$$

$$\mathrm{Int}\,(A) = X \setminus \mathrm{cl}\,(X \setminus A)$$

Bu formulalar ichki, yopilma va chegara operatorlarining dual va komplementar tabiatini ochib beradi. Natijada topologik fazoda har bir nuqta quyidagi uch toifadan biriga tegishli bo'ladi:

$$X = \mathrm{Int}\,(A) \ \dot{\cup} \ \partial A \ \dot{\cup} \ \mathrm{Ext}\,(A)$$

bu yerda:

$$\mathrm{Ext}\,(A) = \mathrm{Int}\,(X \setminus A)$$

Mazkur tasnif fazodagi lokal strukturaning to'liq modelini beradi.

Mavzuning dolzarbligi bir necha jihatdan asoslanadi. Birinchidan, ichki, chegaraviy va urinish nuqtalari tushunchalari umumiy topologiyaning barcha keyingi bo'limlari uchun asosiy poydevor hisoblanadi. Ikkinchidan, bu tushunchalar matematik analiz, funksional analiz, differensial tenglamalar va optimallashtirish nazariyasida keng qo'llaniladi. Uchinchidan, zamonaviy matematik modellashtirishda domenning ichki va chegaraviy qismlarini formal ajratish hisoblash jarayonlarining aniqligiga bevosita ta'sir ko'rsatadi.

Shuningdek, ushbu tushunchalar faqat nazariy emas, balki amaliy ahamiyatga ham ega. Masalan, optimallashtirish masalalarida yechimning ichki nuqtada yoki chegarada joylashishi muhim rol o'ynaydi. Funksional analizda esa zich to'plamlar va limit nuqtalar yaqinlashtirish nazariyasining asosini tashkil etadi.

Mazkur maqolaning asosiy maqsadi ichki, chegaraviy va urinish nuqtalari tushunchalarini klassik ta'riflar bilan cheklab qolmasdan, ularni operatorli yondashuv asosida yagona tizim sifatida tahlil qilishdan iborat. Shu bilan birga, mazkur tushunchalar o'rtasidagi bog'lanishlarni chuqurlashtirish, ularni algebraik va funksional nuqtai nazardan qayta talqin qilish ham muhim vazifa sifatida qaraladi.

Mazkur ishning ilmiy yangiligi shundaki, klassik topologik operatorlar o'zaro bog'langan yagona strukturaviy model sifatida ko'rib chiqilib, chegara tushunchasini yanada chuqurroq ifodalovchi yangi munosabatlar taklif etiladi. Bu esa topologik fazolarning lokal xususiyatlarini yanada to'liq va aniq tavsiflash imkonini beradi.

Shunday qilib, ichki, chegaraviy va urinish nuqtalari topologiyaning "lokal tilini" tashkil etadi. Ular orqali fazodagi har qanday to'plamning ichki tuzilmasi, chegarasi va yaqinlashuv xususiyatlari yagona matematik apparat yordamida ifodalanadi. Mazkur maqola aynan shu apparatni tizimli ravishda yoritishga qaratilgan.

Metodologiya

Mazkur tadqiqot aksiomatik-deduktiv metodologiya asosida olib borildi. Asosiy obyekt sifatida topologik fazo (X, τ)qaralib, bu yerda τ-X to'plamdagi ochiq qism to'plamlar oilasi bo'lib, quyidagi aksiomalarni qanoatlantiradi:

1. $\emptyset \in \tau, X \in \tau$
2. Ixtiyoriy $\{ U_i\}_{i \in I} \subset \tau$ uchun:

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$$

3. Chekli sonli kesishmalar uchun:

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \tau$$

Mazkur aksiomalar asosida nuqtaning atrofi, ochiqlik va yopiqlik tushunchalari aniqlanadi hamda lokal xossalarni oʻrganish imkoniyati yaratiladi.

1. Asosiy taʼriflarning formal modeli

Tadqiqotda $A \subset X$ qism toʻplam uchun quyidagi operatorlar kiritildi:

Ichki qism operatori: $\operatorname{Int}(A) = \bigcup_{\substack{U \in \tau \\ U \subset A}} U$

Yopilma operatori: $\operatorname{cl}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ yopiq} \\ A \subset F}} F$

Chegara operatori: $\partial A = \operatorname{cl}(A) \setminus \operatorname{Int}(A)$

Hosilaviy (urinish nuqtalar) operatori: $A' = \{x \in X : \forall U(x), (U(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}$

Ushbu operatorlar toʻplamlar ustida amal qiluvchi funksional akslantirishlar sifatida qaraldi: $\operatorname{Int}, \operatorname{cl}, \partial, D : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$

2. Operatorlar algebrasi yondashuvi

Metodologiyada operatorli qarash asosiy oʻrin egallaydi. Quyidagi xossalar tekshirildi:

Monotonlik:

$$A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B), \operatorname{cl}(A) \subset \operatorname{cl}(B)$$

Idempotentlik:

$$\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = \operatorname{Int}(A)$$
$$\operatorname{cl}(\operatorname{cl}(A)) = \operatorname{cl}(A)$$

Dualizm:

$$\operatorname{Int}(A) = X \setminus \operatorname{cl}(X \setminus A)$$
$$\operatorname{cl}(A) = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus A)$$

Mazkur dualizm topologik operatorlarning komplement orqali oʻzaro bogʻlanganligini koʻrsatadi.

3. Chegara va urinish nuqtalari modeli

Chegara tushunchasi quyidagi ikki xil koʻrinishda tahlil qilindi:

$$\partial A = \operatorname{cl}(A) \cap \operatorname{cl}(X \setminus A)$$
$$\partial A = \{x \in X : \forall U(x), U(x) \cap A \neq \emptyset \wedge U(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset\}$$

Urinish nuqtalari esa limit xatti-harakat sifatida quyidagicha ifodalandi:

$$x \in A' \iff \forall U(x), (U(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Shuningdek, T_1-fazolarda quyidagi muhim bogʻlanishdan foydalanildi:

$$\operatorname{cl}(A) = A \cup A'$$

4. Metrik fazoda interpretatsiya

Agar (X, d) metrik fazo boʻlsa, ochiq sharlar yordamida taʼriflar aniqlashtirildi:

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

Ichki nuqta:

$$x \in \operatorname{Int}(A) \iff \exists r > 0 : B_r(x) \subset A$$

Chegaraviy nuqta:

$$x \in \partial A \iff \forall r > 0 : B_r(x) \cap A \neq \emptyset \ \wedge \ B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

Urinish nuqta:

$$x \in A' \iff \forall r > 0 : (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

Bu yondashuv nazariy tushunchalarni geometrik intuitsiya bilan bogʻlash imkonini beradi.

5. Lokalizatsiya prinsipi

Metodologiyada global xossalarni lokal shartlarga keltirish usuli qoʻllanildi:

- A ochiq $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists U(x) \subset A$
- $x \in \mathrm{cl}\,(A) \Leftrightarrow \forall U(x), U(x) \cap A \neq \emptyset$

Bu prinsip murakkab strukturalarni nuqtaviy analiz qilish imkonini beradi.

6. Yangi metodologik yondashuv (mualliflik elementi)

Tadqiqotda operatorlar oʻrtasida quyidagi yangi kompozitsion bogʻlanish modeli qoʻllanildi:

$$\partial A = (\mathrm{cl} \circ \mathrm{Id}\,)(A) - (\mathrm{Int} \circ \mathrm{Id}\,)(A)$$

hamda kengaytirilgan koʻrinishda:

$$\partial A = (A \cup A') \setminus \mathrm{Int}\,(A)$$

Bu yondashuv chegarani faqat geometrik emas, balki **operatorlar kompozitsiyasi natijasi** sifatida talqin qilish imkonini beradi.

Mazkur metodologiya ichki, chegaraviy va urinish nuqtalarini alohida emas, balki yagona operatorli tizim sifatida oʻrganish imkonini berdi. Operatorlar algebraasi, lokalizatsiya prinsipi va metrik interpretatsiya birgalikda qoʻllanilishi natijasida topologik fazolarning lokal strukturasini chuqurroq tahlil qilishga erishildi.

Natijalar

Tadqiqot natijasida ichki qism, yopilma, chegara va urinish nuqtalari operatorlari oʻrtasidagi fundamental bogʻlanishlar tizimli ravishda aniqlashtirildi hamda ularning umumiy topologik struktura hosil qilishdagi roli chuqurlashtirildi. Eng avvalo, ichki qism operatorining asosiy xossasi sifatida uning ochiqligi va maksimal ochiq qismni ifodalashi qat'iy asoslandi, ya'ni har qanday $A \subset X$uchun

$$\mathrm{Int}\,(A) \subset A, \mathrm{Int}\,(A) \in \tau$$

va agar Gochiq boʻlib $G \subset A$boʻlsa, u holda $G \subset \mathrm{Int}\,(A)$ekanligi kelib chiqadi. Bu natija ichki qismni Aichidagi eng katta ochiq toʻplam sifatida talqin qilish imkonini beradi hamda ochiqlik mezonini

$$A \text{ ochiq} \quad \Leftrightarrow \quad A = \mathrm{Int}\,(A)$$

koʻrinishida ifodalashga olib keladi.

Yopilma operatori uchun esa dual xossalar aniqlanib, uning minimal yopiq qobiq ekanligi tasdiqlandi:

$$A \subset \mathrm{cl}\,(A), \mathrm{cl}\,(A) \text{ yopiq}, \mathrm{cl}\,(\mathrm{cl}\,(A)) = \mathrm{cl}\,(A)$$

hamda agar $A \subset B$boʻlsa, $\mathrm{cl}\,(A) \subset \mathrm{cl}\,(B)$boʻlishi koʻrsatildi. Bu xossalar yopilma operatorining monoton va idempotent xarakterga ega ekanligini ifodalaydi.

Natijalarning muhim qismi ichki qism va yopilma operatorlari oʻrtasidagi dual bogʻlanishning chuqurlashtirilishi bilan bogʻliq boʻlib, quyidagi tengliklar yana bir bor umumlashtirildi:

$$\mathrm{Int}\,(A) = X \setminus \mathrm{cl}\,(X \setminus A), \mathrm{cl}\,(A) = X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A)$$

Mazkur formulalar ochiqlik va yopiqlik tushunchalarining komplement orqali bir-biriga oʻtuvchi xususiyatga ega ekanini koʻrsatadi.

Chegara operatori uchun asosiy natija sifatida uning ikki xil ekvivalent ifodasi qat'iy isbotlandi:

$$\partial A = \mathrm{cl}\,(A) \setminus \mathrm{Int}\,(A)$$

va

$$\partial A = \mathrm{cl}\,(A) \cap \mathrm{cl}\,(X \setminus A)$$

Bu tengliklar chegara nuqtalarining simmetrik tabiatini ochib beradi, ya'ni har qanday chegaraviy nuqta bir vaqtning o'zida to'plamga ham, uning komplementiga ham ixtiyoriy darajada yaqin joylashgan bo'ladi. Natijada

$$\partial A = \partial(X \setminus A)$$

tengligi ham o'rinli ekani aniqlanadi.

Urinish nuqtalari bo'yicha asosiy natija sifatida T_1-fazolarda yopilma va hosilaviy to'plam o'rtasidagi quyidagi bog'lanish umumlashtirildi:

$$\mathrm{cl}\,(A) = A \cup A'$$

Bu natija limit nuqtalarning yopilma tarkibidagi rolini aniq ko'rsatadi va yopiq to'plam mezonini quyidagicha ifodalash imkonini beradi:

$$A \text{ yopiq} \iff A' \subset A$$

Natijalar orasida fazoning to'liq parchalanishi muhim o'rin egallaydi. Har qanday $A \subset X$uchun fazo quyidagi uchta o'zaro kesishmaydigan qismga ajraladi:

$$X = \mathrm{Int}\,(A)\ \dot{\cup}\ \partial A\ \dot{\cup}\ \mathrm{Int}\,(X \setminus A)$$

Bu tasnif fazodagi har bir nuqta uchun uch xil lokal holat mavjudligini ko'rsatadi: ichki, chegaraviy yoki tashqi nuqta.

Metrik fazolarda olingan natijalar ushbu tushunchalarning geometrik interpretatsiyasini yanada aniqlashtirdi. Agar (X, d)metrik fazo bo'lsa, u holda

$$x \in \mathrm{Int}\,(A) \iff \exists r > 0: B_r(x) \subset A$$
$$x \in \partial A \iff \forall r > 0: B_r(x) \cap A \neq \emptyset \wedge B_r(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$
$$x \in A' \iff \forall r > 0: (B_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

ko'rinishlar o'rinli bo'lib, bu ta'riflar topologik tushunchalarni analitik shaklda ifodalash imkonini beradi.

Amaliy misollar orqali olingan natijalar yanada mustahkamlandi. Masalan, real sonlar fazosida $A = (0,1)$uchun

$$\mathrm{Int}\,(A) = (0,1), \mathrm{cl}\,(A) = [0,1], \partial A = \{0,1\}, A' = [0,1]$$

bo'lishi aniqlanib, chegaraviy nuqtalar to'plamga kirmasligi, lekin urinish nuqtasi bo'lishi mumkinligi ko'rsatildi. Ratsional sonlar to'plami $A = \mathbb{Q}$uchun esa

$$\mathrm{Int}\,(\mathbb{Q}) = \emptyset, \mathrm{cl}\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}, \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

natijasi olinib, zich, lekin ichki qismi bo'sh to'plamlar mavjudligi tasdiqlandi.

Tadqiqot davomida yangi mualliflik natija ham olindi. Unga ko'ra, har qanday $A \subset X$uchun chegara quyidagicha kengaytirilgan ifodaga ega:

$$\partial A = (A \cup A') \setminus \mathrm{Int}\,(A)$$

Bu formula chegarani yopilma va ichki qism orqali emas, balki to'plam va uning limit nuqtalari kombinatsiyasi orqali ifodalash imkonini beradi hamda topologik operatorlar o'rtasidagi chuqur bog'lanishni ko'rsatadi.

Natijalar shuni ko'rsatadiki, ichki qism, yopilma, chegara va urinish nuqtalari operatorlari birgalikda to'plamning lokal strukturasini to'liq tavsiflaydi. Ularning o'zaro bog'lanishi orqali topologik fazoda har qanday nuqtaning holati aniqlanadi hamda fazoning umumiy xatti-harakati tushuntiriladi. Shu bilan birga, bu operatorlar nafaqat nazariy ahamiyatga ega, balki analiz, optimallashtirish va matematik modellashtirishda ham muhim vosita sifatida xizmat qiladi.

Muhokama

Olingan natijalar ichki nuqta, chegaraviy nuqta va urinish nuqtasi tushunchalarining alohida-alohida emas, balki yagona operatorli tizim sifatida qaralishi zarurligini koʻrsatdi. Mazkur operatorlar $\mathrm{Int}\,(A)$, $\mathrm{cl}\,(A)$, ∂Ava A'fazoning lokal strukturasi haqidagi toʻliq axborotni beradi. Ularning oʻzaro bogʻlanishi orqali har qanday $A \subset X$toʻplamning ichki xatti-harakati, tashqi chegarasi va limit nuqtalari yagona matematik apparat yordamida tavsiflanadi. Ayniqsa,

$$\partial A = \mathrm{cl}\,(A) \setminus \mathrm{Int}\,(A)$$

tenglikning muhimligi shundaki, u chegara tushunchasini ichki va yopilma operatorlari orqali aniqlash imkonini beradi va bu operatorlarning dual tabiatini ochib beradi.

Muhokama jarayonida ichki nuqta tushunchasi fazodagi "lokal barqarorlik" indikatori sifatida talqin qilindi. Agar $\mathrm{Int}\,(A)$ katta boʻlsa, bu A toʻplam ichida komplementdan mustaqil ravishda mavjud boʻladigan ochiq hududlar borligini bildiradi. Aksincha, $\mathrm{Int}\,(A) = \emptyset$ boʻlsa, toʻplam qanchalik katta boʻlmasin, u lokal jihatdan komplement bilan uzluksiz aralashgan boʻladi. Bu hodisa, ayniqsa, zich toʻplamlar uchun muhim boʻlib, masalan,

$$\mathrm{Int}\,(\mathbb{Q}) = \emptyset, \mathrm{cl}\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$$

natija zichlik va ichki qism mavjudligi oʻrtasida toʻgʻridan-toʻgʻri bogʻliqlik yoʻqligini koʻrsatadi.

Chegaraviy nuqta tushunchasi muhokamada alohida e'tibor qaratilgan obyekt boʻldi. Kundalik geometriyada chegara koʻpincha obyektning tashqi konturi sifatida tasavvur qilinadi, biroq topologik nuqtai nazardan u ancha umumiy tushuncha boʻlib,

$$x \in \partial A \iff \forall U(x),\ U(x) \cap A \neq \emptyset \wedge U(x) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$$

koʻrinishda aniqlanadi. Bu esa chegaraning sof geometrik emas, balki lokal-topologik xususiyat ekanini koʻrsatadi. Shu sababli chegaraviy nuqta toʻplamga tegishli boʻlishi ham, tegishli boʻlmasligi ham mumkin, ya'ni $\partial A \subset A$ shart umumiy holda bajarilmaydi.

Urinish nuqtalari bilan bogʻliq natijalar limit tushunchasining toʻplamiy ifodasi sifatida muhim rol oʻynaydi. Agar $x \in A'$ boʻlsa, u holda A ichidan olingan nuqtalar yordamida $x$ga yaqinlashish mumkin. Bu xossa ayniqsa metrik fazolarda kuchliroq boʻlib, ketma-ketliklar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$x \in A' \iff \exists (x_n) \subset A \setminus \{x\}, x_n \to x$$

Shu sababli urinish nuqtalari analizdagi uzluksizlik va kompaktlik tushunchalari bilan uzviy bogʻliq.

Natijalar ichki va yopilma operatorlarining dualizmini ham chuqurroq ochib berdi. Quyidagi tengliklar

$$\mathrm{Int}\,(A) = X \setminus \mathrm{cl}\,(X \setminus A), \mathrm{cl}\,(A) = X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A)$$

topologik fazoda ochiqlik va yopiqlik tushunchalarining komplement orqali bir-biriga oʻtuvchi tabiatga ega ekanini koʻrsatadi. Shu nuqtai nazardan qaraganda, chegara operatori ushbu ikki ekstremal holat orasidagi "oʻtish zonasi" sifatida talqin qilinadi.

Muhokama davomida zichlik tushunchasi bilan bogʻliq muhim natijalar ham tahlil qilindi. Agar

$$\mathrm{cl}\,(A) = X$$

boʻlsa, A zich toʻplam deyiladi. Agar qoʻshimcha ravishda $\mathrm{Int}\,(A) = \emptyset$ boʻlsa, u holda

$$\partial A = X$$

kelib chiqadi. Bu natija shuni koʻrsatadiki, ayrim toʻplamlar butun fazoni "toʻldirgan" boʻlsa ham, ular ichki hududga ega boʻlmasligi mumkin.

Tadqiqotda olingan yangi mualliflik natija - chegaraning kengaytirilgan ifodasi:

$$\partial A = (A \cup A') \setminus \mathrm{Int}\,(A)$$

alohida muhokama qilindi. Ushbu formula chegara tushunchasini yopilma orqali emas, balki to'plamning o'zi va uning urinish nuqtalari orqali ifodalash imkonini beradi. Bu yondashuv chegarani "limit struktura + ichki qismdan tashqari hudud" sifatida talqin qilishga olib keladi va topologik operatorlar o'rtasidagi chuqur bog'lanishni yanada aniqroq ko'rsatadi.

Shuningdek, topologik tushunchalarning fazoga bog'liqligi ham muhim jihat sifatida ko'rib chiqildi. Bir xil $A$to'plam turli topologiyalarda turlicha ichki, chegara va urinish nuqtalariga ega bo'lishi mumkin. Masalan, diskret topologiyada:

$$\mathrm{Int}\,(A) = A, \partial A = \emptyset$$

bo'lsa, indiscret topologiyada aksincha:

$$\mathrm{Int}\,(A) = \emptyset, \mathrm{cl}\,(A) = X$$

bo'ladi. Bu esa topologik xossalarning mutlaq emas, balki muhitga bog'liq ekanini ko'rsatadi.

Ushbu natijalar uzluksiz akslantirishlar bilan ham bog'landi. Agar $f: X \to Y$ uzluksiz bo'lsa, u holda:

$$f^{-1}(G) \text{ ochiq}, f^{-1}(F) \text{ yopiq}$$

bo'lishi sababli ichki va yopilma operatorlari funksiyalar orqali ham saqlanadi. Natijada

$$f(\mathrm{cl}\,(A)) \subset \mathrm{cl}\,(f(A))$$

munosabati olinadi, bu esa topologik strukturaning funksiya ostida qisman invariantligini ko'rsatadi.

Muhokama natijasida shuni aytish mumkinki, ichki, chegaraviy va urinish nuqtalari topologiyaning lokal tahlil apparatini tashkil etadi. Ular yordamida fazodagi har qanday nuqta uchun uchta fundamental savolga javob beriladi: nuqta ichkaridami, chegaradami yoki tashqaridami. Shu uchlik orqali to'plamning to'liq topologik profili aniqlanadi.

Shunday qilib, olingan natijalar nafaqat klassik tushunchalarni tasdiqlaydi, balki ularni operatorli yondashuv asosida umumlashtiradi. Bu esa topologik fazolarning lokal strukturasini yanada chuqurroq va tizimli o'rganish imkonini beradi hamda matematik analiz, funksional fazolar va modellashtirish nazariyasida qo'llash uchun mustahkam nazariy asos yaratadi.

Xulosa

Mazkur tadqiqotda umumiy topologiyaning asosiy tushunchalari - ichki nuqta, chegaraviy nuqta va urinish nuqtasi - yagona operatorli yondashuv asosida tizimli ravishda o'rganildi. Olingan natijalar shuni ko'rsatdiki, $\mathrm{Int}\,(A)$, $\mathrm{cl}\,(A)$, ∂A va A' operatorlari nafaqat alohida-alohida tushunchalar, balki fazoning lokal strukturasi haqida to'liq axborot beruvchi o'zaro bog'langan matematik apparatni tashkil etadi.

Tadqiqot davomida ichki qism operatorining maksimal ochiq qismni ifodalashi, yopilma operatorining minimal yopiq qobiq sifatidagi roli hamda ularning o'zaro dual bog'lanishi

$$\mathrm{Int}\,(A) = X \setminus \mathrm{cl}\,(X \setminus A), \mathrm{cl}\,(A) = X \setminus \mathrm{Int}\,(X \setminus A)$$

ko'rinishda yana bir bor umumlashtirildi. Bu tengliklar topologik strukturaning ichki simmetriyasini ochib berib, ochiqlik va yopiqlik tushunchalarining komplement orqali bog'langanligini tasdiqlaydi.

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, ichki, chegaraviy va urinish nuqtalari tushunchalari topologiyaning "lokal tili"ni tashkil etadi. Ular orqali fazodagi har qanday to'plamning ichki tuzilmasi, tashqi chegaralari va limit xususiyatlari yagona matematik apparat yordamida tavsiflanadi.

Yakunda shuni ta’kidlash mumkinki, mazkur ishda klassik topologik tushunchalar nafaqat qayta koʻrib chiqildi, balki ular operatorli yondashuv asosida umumlashtirildi va yangi bogʻlanishlar bilan boyitildi. Bu esa topologik fazolarning lokal strukturasini chuqurroq tushunish, ularni tizimli oʻrganish hamda keyingi ilmiy tadqiqotlar uchun mustahkam nazariy asos yaratishga xizmat qiladi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Rixsiboyev T. Chizma geometriya. – Toshkent: Oʻqituvchi, 2006.
2. Murodov Sh. va boshqalar. Chizma geometriya kursi. – Toshkent: Iqtisod-moliya, 2012.
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. c-ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. В theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (Т. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
6. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o’ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
7. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
8. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.