

FUNKSIONAL FAZOLAR VA BAHOLASH BAZISLARI. DAVRIY VA DAVRIY BO‘LMAGAN SIGNALLARNI SPEKTRI

**G‘ulomov Farruxbek
L.Dalibekov**

Farg‘ona davlat texnika universiteti

E-mail: gulomovfarruxbek09@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.19726779>

Annotatsiya: Ushbu maqola signallarni spektral tahlil qilishning matematik asoslari – funksional fazolar, ortogonal va ortonormal bazislar, hamda davriy va davriy bo‘lmagan signallarning spektrlariga bag‘ishlangan. Maqolada L_2 (kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar) fazosi va Hilbert fazosining asosiy xossalari, shuningdek, trigonometrik funksiyalar sistemasidan tashkil topgan baholash bazislari tahlil qilinadi. Davriy signallar spektri Furiye qatori (trigonometrik va kompleks shakllarda) orqali, davriy bo‘lmagan signallar spektri esa Furiye o‘zgartirishi (to‘g‘ri va teskari) hamda uning asosiy xossalari (chiziqlilik, siljish, masshtablash, konvolyutsiya, Parseval teoremasi) yordamida yoritiladi. Maqolada davriy va davriy bo‘lmagan signallar spektrlarining qiyosiy tahlili (diskretlik – uzluksizlik, energiya – quvvat mezonlari) keltirilgan. Shuningdek, spektral tahlilning radioaloqa, akustika, tibbiyot, radar va raqamli signalni qayta ishlashdagi amaliy ahamiyati ko‘rsatilgan. Maqola formulalarsiz, tushunarli matn shaklida yozilgan bo‘lib, ushbu sohaga oid fundamental tushunchalarni egallashga qaratilgan.

Kalit so‘zlar: Funksional fazolar, L_2 fazosi, Hilbert fazosi, ortogonal bazis, ortonormal bazis, baholash bazislari, trigonometrik funksiyalar sistemasi, Furiye qatori, Furiye o‘zgartirishi, spektral tahlil, davriy signallar, davriy bo‘lmagan signallar, diskret spektr, uzluksiz spektr, amplituda spektri, faza spektri, garmonik tahlil, spektral zichlik, Parseval teoremasi, konvolyutsiya, vaqt va chastota sohasi, signal energiyasi va quvvati, raqamli signalni qayta ishlash.

Kirish

Signallarni spektral tahlil qilish zamonaviy texnikaning muhim sohalaridan biridir. Radioaloqa, akustika, tibbiyot diagnostikasi, seismologiya va boshqa ko‘plab yo‘nalishlarda signallarning chastota tarkibini bilish zarur. Har qanday signal vaqt davomida o‘zgaruvchi kattalikdir – masalan, mikrofon qabul qilgan tovush bosimi yoki antennadagi kuchlanish. Bu signalni oddiy garmonik tebranishlar – sinus va kosinus funksiyalari yig‘indisi sifatida ifodalash mumkin. Aynan shu ifodalashning matematik asoslari funksional fazolar va ortogonal bazislar tushunchalariga tayanadi. Ushbu maqolada ushbu tushunchalar, shuningdek, davriy va davriy bo‘lmagan signallarning spektrlari tahlil qilinadi.

1. Funksional fazolar haqida tushuncha

Funksional fazo – bu ma‘lum xususiyatlarga ega bo‘lgan funksiyalar to‘plamidir. Oddiy uch o‘lchamli fazoda nuqtalar koordinatalar bilan ifodalanadi. Funksional fazoda esa “nuqtalar” o‘rnida funksiyalar turadi. Signallarni tahlil qilishda eng muhim fazo – kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosi, ya‘ni L_2 fazosi.

L_2 fazosiga shunday funksiyalar kiradiki, ularning kvadrati ma‘lum oraliq bo‘yicha olingan integrali chekli qiymatga ega. Fizik nuqtai nazardan, bu signalning energiyasi chekli ekanligini anglatadi. Masalan, qisqa muddatli impuls yoki cheklangan vaqt oralig‘ida mavjud bo‘lgan tovush paketi shunday fazoga tegishli.

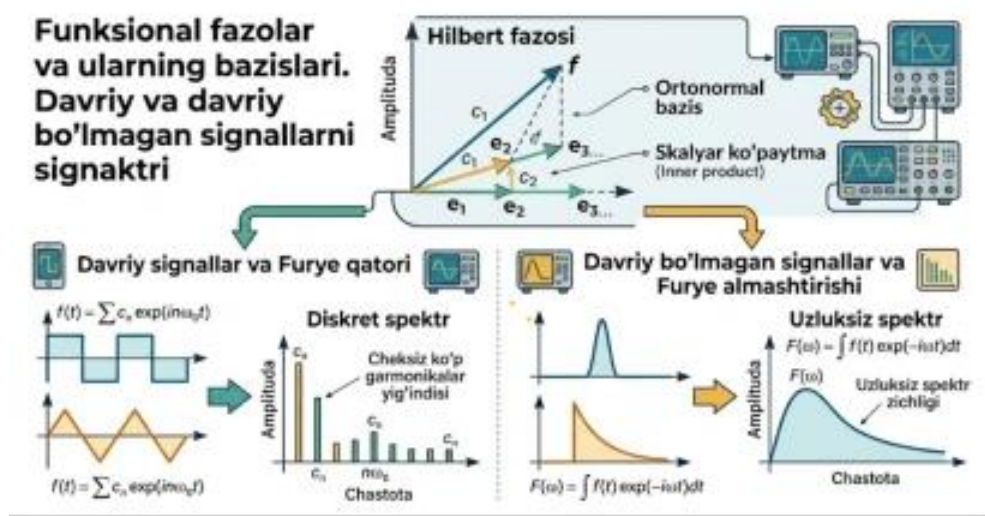
L_2 fazosida funksiyalar orasidagi skalyar ko'paytma va norma tushunchalari mavjud. Skalyar ko'paytma ikki funksiyaning o'xshashlik darajasini, norma esa funksiyaning “kuchi” yoki “energiyasini” ifodalaydi. Agar L_2 fazosi to'liq bo'lsa – ya'ni undagi har qanday fundamental ketma-ketlik limitga ega bo'lsa – bunday fazo Hilbert fazosi deyiladi. Hilbert fazosining eng qimmatli xususiyati shundaki, undagi har qanday elementni ortogonal bazis bo'yicha yoyish mumkin. Signalni tahlil qilishda bu xususiyat bizga murakkab signallarni sodroq tarkibiy qismlarga ajratish imkonini beradi.

2. Baholash bazislari – ortogonal va ortonormal sistemalar

Bazis – bu fazoning har bir elementini yagona usulda chiziqli kombinatsiya sifatida ifodalash imkonini beradigan funksiyalar sistemasi. Oddiy fazoda bazis vazifasini uchta koordinata o'qlari bajaradi. Funksional fazoda esa bazis vazifasini trigonometrik funksiyalar yoki boshqa maxsus funksiyalar sistemasini o'taydi.

Agar bazisdagi ikki har xil funksiyaning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, bunday bazis ortogonal deyiladi. Bu funksiyalar bir-biriga “perpendikulyar” ekanini anglatadi. Agar qo'shimcha ravishda har bir funksiyaning normasi (o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi) birga teng bo'lsa, bu ortonormal bazis deyiladi.

Signallarni tahlil qilishda eng keng tarqalgan ortonormal bazis – trigonometrik funksiyalar sistemasidir. Bu sistemaga o'zgarmas komponent (son), turli chastotali kosinuslar va sinuslar kiradi. Aynan shu bazis Furiye qatorining asosini tashkil etadi. Har qanday davriy signalni, agar u ma'lum silliqlik shartlarini qanoatlantirsa, ushbu trigonometrik bazis bo'yicha yoyish mumkin.



3. Davriy signallar spektri – Furiye qatori

Davriy signal – bu ma'lum T vaqt oralig'idan keyin o'zini takrorlaydigan signaldir. Masalan, metronomning tiqillashi, elektr tarmog'idagi o'zgaruvchan tok yoki musiqa asbobining uzluksiz tovushi. Bunday signallarni tahlil qilishda Furiye qatoridan foydalaniladi.

Furiye qatorining trigonometrik shaklida davriy signal uch qismdan iborat qilib yoziladi: o'zgarmas tashkil etuvchi (o'rtacha qiymat), turli chastotali kosinuslar yig'indisi va turli chastotali sinuslar yig'indisi. Bu yerdagi chastotalar asosiy chastota deb ataladigan qiymatga karrali bo'ladi. Asosiy chastota signalning davriga teskari proporsionaldir. Har bir garmonikaning oldidagi koeffitsiyentlar Furiye koeffitsiyentlari deyiladi va ular maxsus integral formulalar yordamida hisoblanadi.

Furye qatorining kompleks shakli esa qisqaroq va qulayroqdir. Bunda signal cheksiz ko‘p kompleks eksponensial funksiyalar yig‘indisi sifatida ifodalanadi. Har bir eksponensialga mos keluvchi kompleks koeffitsiyent signalning spektrini tashkil etadi.

Davriy signallarning eng muhim xususiyati – ularning spektri diskret (chiziqli) bo‘ladi. Ya‘ni, signalning chastota tarkibi faqat asosiy chastotaga karrali alohida nuqtalarda noldan farq qiladi. Bu nuqtalar orasida spektr komponentlari mavjud emas. Masalan, to‘g‘ri burchakli impuls ketma-ketligi (meander) spektri sinc funksiyasi ko‘rinishidagi konvertga ega bo‘lib, asosiy va yon loblardan iborat. Impulsning davri va kengligi nisbati spektrning shaklini belgilaydi: impuls qancha tor bo‘lsa, spektr shuncha keng bo‘ladi.

4. Davriy bo‘lmagan signallar spektri – Furye o‘zgartirishi

Ko‘pchilik real signallar davriy emas. Masalan, odam gapirganda tovush signallari, bir marta bosilgan tugma signali yoki seysmik tebranishlar. Bunday signallarni tahlil qilish uchun Furye o‘zgartirish apparati qo‘llaniladi.

Davriy signalda davr cheksizlikka intilganda nima sodir bo‘ladi? Asosiy chastota nolga intiladi va diskret spektr nuqtalari bir-biriga shunchalik yaqinlashadiki, ular uzluksiz spektrga aylanadi. Yig‘indi esa integralga o‘tadi. Shu tariqa Furye o‘zgartirishi hosil bo‘ladi.

Furye o‘zgartirishi ikki xil bo‘ladi: to‘g‘ri va teskari. To‘g‘ri Furye o‘zgartirishi vaqt funksiyasini chastota funksiyasiga aylantiradi. Bu funksiya spektral zichlik deyiladi va u odatda kompleks sonidir. Spektral zichlikning moduli amplituda spektrini, argumenti esa faza spektrini beradi. Teskari Furye o‘zgartirishi esa spektral zichlikdan vaqt funksiyasini tiklaydi.

Furye o‘zgartirishining bir qancha muhim xossalari mavjud. Chiziqlilik xossasiga ko‘ra, signallar yig‘indisining spektri ularning spektrlari yig‘indisiga teng. Vaqt siljishi xossasiga ko‘ra, signal vaqt bo‘yicha siljisa, uning spektrining moduli o‘zgarmaydi, faqat fazasi o‘zgaradi. Chastota siljishi xossasi modulyatsiyalangan signallarni tahlil qilishda qo‘l keladi. Masshtablash xossasi signal vaqt bo‘yicha siqilsa, uning spektri chastota bo‘yicha kengayishini ko‘rsatadi. Konvolyutsiya teoremasi – ikki signalning konvolyutsiyasi spektri ular spektrlari ko‘paytmasiga teng. Eng muhim xossalardan biri – Parseval teoremasi bo‘lib, unga ko‘ra signalning vaqt bo‘yicha energiyasi uning spektrining chastota bo‘yicha energiyasiga teng. Bu energiyaning saqlanish qonunidir.

Oddiy misol: bitta to‘g‘ri burchakli impuls. Amplitudasi A va kengligi τ bo‘lgan impulsning spektri sinc funksiyasi ko‘rinishida bo‘ladi. Uning asosiy lobining kengligi taxminan bir impuls kengligiga teskari proporsional. Demak, impuls qancha qisqa bo‘lsa, uning spektri shuncha keng – bu noaniqlik prinsipining namoyonidir. Gauss impulsining spektri ham Gauss funksiyasidir – bu o‘z-o‘ziga Furye tasviri bo‘lgan yagona funksiyadir.

5. Davriy va davriy bo‘lmagan signallar spektrlarining qiyosiy tahlili

Davriy va davriy bo‘lmagan signallarning spektrlari o‘rtasidagi asosiy farqlarni quyidagicha umumlashtirish mumkin:

Davriy signallar spektri – diskret (chiziqli). Bu spektr faqat alohida chastotalarda mavjud bo‘lgan garmonik tashkil etuvchilardan iborat. Bu tashkil etuvchilarning amplitudalari chekli qiymatlarga ega. Spektr konverti diskret nuqtalar orqali aniqlanadi. Bunday signallarning fizik ma‘nosi – ular cheksiz energiyaga ega, ammo chekli o‘rtacha quvvatga ega.

Davriy bo‘lmagan signallar spektri – uzluksiz. Spektr barcha chastotalarda mavjud. Spektral zichlik – bu amplitudaning chastota birligiga to‘g‘ri keladigan qiymati, ya‘ni uning o‘lchov birligi har xil. Bunday signallar chekli energiyaga ega. Spektr uzluksiz bo‘lgani uchun

alohida garmonikalar haqida emas, balki chastota oralig'idagi energiya taqsimoti haqida gapiriladi.

Muhim bir bog'lanish: davriy signalning Furiye qator koeffitsiyentlari, uning bir davriga to'g'ri keladigan davriy bo'lmagan signal spektral zichligining davrga bo'lingan holda diskret chastotalardagi qiymatlariga teng. Ya'ni, ikkala tasvir bir-biri bilan chambarchas bog'liq.

Xulosa

Funksional fazolar, xususan L_2 va Hilbert fazolari, signallarni spektral tahlil qilishning matematik asosini tashkil etadi. Ortogonal va ortonormal bazislar, ayniqsa trigonometrik funksiyalar sistemasi, signallarni garmonik tashkil etuvchilarga ajratish imkonini beradi.

Davriy signallar diskret spektrga ega va ular Furiye qatori bilan ifodalanadi. Davriy bo'lmagan signallar esa uzluksiz spektrga ega bo'lib, Furiye o'zgartirishi yordamida tahlil qilinadi. Ikkala holatda ham signalning chastota tarkibi uning asosiy xususiyatlarini ochib beradi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Kreyszig, E. “Advanced Engineering Mathematics” (funksional fazolar va Furiye tahlili bo'limlari)
2. Oppenheim, A. V., Willsky, A. S. “Signals and Systems” (signallar va sistemalar asoslari)
3. Brigham, E. O. “The Fast Fourier Transform” (tezkor Furiye o'zgartirishi)
4. O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining “Radiotexnika asoslari” fanidan o'quv qo'llanmalari