PROYEKTIV GEOMETRIYA NUQTAYI NAZARIDAN YEVKLID VA LOBACHEVSKIY GEOMETRIYALARINING TAHLILI

Abdug'ofurova Zamira Ismonjon qizi
NamDU Fizika-matematika fakulteti
matematika yo'nalishi1-bosqich talabasi
Ilmiy rahbar: **Maxmudova Dilnoza Xaytmirzayevna**

https://doi.org/10.5281/zenodo.19818861

Annotatsiya: Ushbu maqolada Yevklid, proyektiv va Lobachevskiy geometriyalari o'zaro bog'liqlikda analitik tarzda o'rganiladi. Yevklid geometriyasining aksiomatik asoslari, xususan parallel postulatning roli yoritiladi. Proyektiv geometriyada invariant kattaliklarning ustuvorligi va kross-nisbatning saqlanish xossalari tahlil qilinadi. Lobachevskiy geometriyasida esa parallel aksiomaning o'zgartirilishi natijasida hosil bo'ladigan giperbolik fazo xossalari ko'rib chiqiladi. Olingan natijalar turli geometriyalar o'rtasidagi bog'liqlikni yagona nazariy asosda tushuntirish imkonini beradi.

Kalit so'zlar: Yevklid geometriyasi, proyektiv geometriya, Lobachevskiy geometriyasi, noyevklid geometriya, parallel aksioma, kross-nisbat, invariantlar, giperbolik fazo, Poincaré modeli, geometrik transformatsiyalar

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГЕОМЕТРИЙ ЕВКЛИДА И ЛОБАЧЕВСКОГО С ПРОЕКТИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

Аннотация: В данной статье в аналитическом плане рассматриваются евклидова, проективная и геометрия Лобачевского в их взаимосвязи. Освещаются аксиоматические основы евклидовой геометрии, в частности роль аксиомы параллельности. В проективной геометрии анализируются инвариантные величины и свойства сохранения кросс-отношения. В геометрии Лобачевского рассматриваются свойства гиперболического пространства, возникающие при изменении аксиомы параллельности. Полученные результаты позволяют объяснить взаимосвязь различных геометрий на единой теоретической основе.

Ключевые слова: евклидова геометрия, проективная геометрия, геометрия Лобачевского, неевклидова геометрия, аксиома параллельности, кросс-отношение, инварианты, гиперболическое пространство, модель Пуанкаре, геометрические преобразования

COMPARATIVE ANALYSIS OF EUCLIDEAN AND LOBACHEVSKIAN GEOMETRIES FROM PROJECTIVE PERSPECTIVE

Abstract: This article analytically examines Euclidean, projective, and Lobachevskian geometries in their interrelation. The axiomatic foundations of Euclidean geometry are discussed, with particular emphasis on the role of the parallel postulate. In projective geometry, the priority of invariant quantities and the preservation properties of the cross-ratio are analyzed. In Lobachevskian geometry, the properties of hyperbolic space arising from the modification of the parallel axiom are considered. The obtained results make it possible to explain the relationships between different geometries within a unified theoretical framework.

Keywords: Euclidean geometry, projective geometry, Lobachevskian geometry, non-Euclidean geometry, parallel axiom, cross-ratio, invariants, hyperbolic space, Poincaré model, geometric transformations

Kirish

Geometriya matematik fan sifatida fazo va undagi shakllarning xossalarini oʻrganadi hamda ilmiy tafakkurning rivojlanishida muhim oʻrin tutadi. Yevklid tomonidan yaratilgan aksiomatik tizim uzoq vaqt davomida yagona geometriya sifatida qaralgan va u barcha klassik geometrik tushunchalarning asosini tashkil etgan. Ushbu tizimda nuqta, toʻgʻri chiziq va tekislik boshlangʻich tushunchalar sifatida qabul qilinadi va ulardan kelib chiqib barcha natijalar isbotlanadi.

Biroq, parallel chiziqlar haqidagi beshinchi aksioma boshqa aksiomalarga nisbatan murakkabligi sababli koʻplab tadqiqotlarga sabab boʻldi. Natijada XIX asrda Lobachevskiy tomonidan ushbu aksiomani inkor etishga asoslangan yangi geometrik tizim yaratildi. Shu bilan birga, proyektiv geometriya shakllanib, u geometrik obyektlarni invariant xossalar orqali oʻrganishga imkon berdi. Ushbu yondashuv turli geometriyalarni yagona nazariy asosda koʻrib chiqish imkonini yaratadi.

Metod

Tadqiqotda aksiomatik va analitik yondashuvlar birgalikda qoʻllanildi. Yevklid geometriyasida asosiy munosabatlar quyidagi aksiomalar orqali ifodalanadi:

$$\forall A, B\ (A \neq B) \Rightarrow \exists!\, l: A, B \in l$$

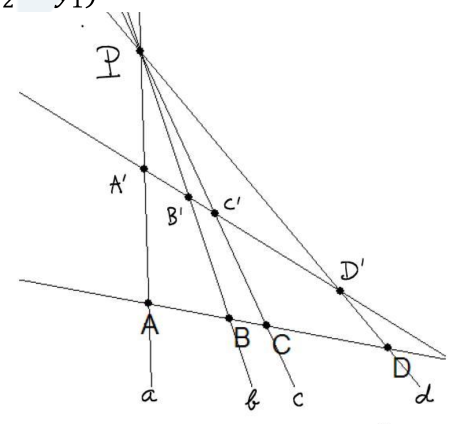
Parallel chiziqlar uchun:

$$\forall l, \forall A \notin l, \exists!\ m: A \in m, m \parallel l$$

Masofa funksiyasi Evklid tekisligida quyidagicha aniqlanadi:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Proyektiv geometriyada invariant kattalik sifatida kross-nisbat ishlatiladi:



$$(A, B; C, D) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$$

va u proyektiv oʻzgarishlarda saqlanadi:

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$$

Lobachevskiy geometriyasida esa parallel aksioma quyidagicha umumlashtiriladi:

$$\forall l, \forall A \notin l, \exists \infty m: A \in m, m \cap l = \emptyset$$

Giperbolik fazo Poincaré modeli orqali tavsiflanadi:

$$ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$$

Natija va Muhokama

Tadqiqot natijalari shuni koʻrsatdiki, Yevklid geometriyasi maxsus hol sifatida qaralib, uni proyektiv geometriya va metrik tuzilmaning birlashuvi sifatida ifodalash mumkin. Proyektiv geometriyada masofa va burchak kabi tushunchalar asosiy emas, balki invariant kattaliklar ustuvor hisoblanadi.

Lobachevskiy geometriyasida esa parallel chiziqlar sonining cheksizligi fazoning egri tuzilishini ifodalaydi. Bu geometriyada uchburchak burchaklari yigʻindisi quyidagicha boʻladi:

$$\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$$

Shuningdek, uchburchak yuzasi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$S = R^2(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$$

Bu natijalar turli geometriyalar oʻrtasidagi fundamental farqlarni koʻrsatadi. Shu bilan birga, ular yagona nazariy tizimda umumlashtirilishi mumkinligini ham isbotlaydi. Proyektiv yondashuv esa bu tizimlarni birlashtiruvchi asosiy metod sifatida namoyon boʻladi.

Xulosa

Mazkur tadqiqot natijalari Yevklid, proyektiv va Lobachevskiy geometriyalari oʻzaro bogʻliq holda rivojlanishini koʻrsatdi. Yevklid geometriyasi klassik asos boʻlsa-da, u yagona model emasligi aniqlandi. Proyektiv geometriya invariant xossalar orqali umumiy nazariy asosni taʼminlaydi, Lobachevskiy geometriyasi esa fazoning egri tuzilishini ochib beradi.

Natijada turli geometrik tizimlar yagona konseptual asosda qaralishi mumkinligi isbotlandi. Bu esa zamonaviy matematika va nazariy fizikaning rivojlanishida muhim ahamiyatga ega boʻlib, kelgusidagi tadqiqotlar uchun mustahkam nazariy poydevor yaratadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Rixsiboyev T. Chizma geometriya. – Toshkent: Oʻqituvchi, 2006.
2. Murodov Sh. va boshqalar. Chizma geometriya kursi. – Toshkent: Iqtisod-moliya, 2012.
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology. e-ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, сс. 74–78). Zenodo. https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqi. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, сс. 35–40).
6. Karimberdiyeva , D. ., & Mahmudova , D. . (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. Развитие педагогических технологий в современных науках, 4(3), 114–117.
7. Ismoilova, D., & Mahmudova, D. (2025). Ko ‘po ‘lchovli yevklid fazosi: o ‘qitish texnologiyasi asosida yondashuv. In *Innov. Conf. Published online April* (Vol. 17, No. 2025, pp. 1-7).
8. Abdiqayumov, A., & Maxmudova, D. (2025). Central and parallel projections and their properties. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, *4*(8), 177-184.