

TEŇSIZLIKLERDI DÁLILLEWDE BAHALAW USILINIŇ
QOLLANILIWI**Dilmuratov Damir Dauletmurat uli**

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, student

Maksatov Sunkat Muxit uli

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, student

Yusupov Muzaffar Aliyar uli

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, student

Boranbaev Orazgali Baxtibay uli

Qaraqalpaq mámleketlik universiteti, student

<https://doi.org/10.5281/zenodo.10473413>

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 01-January 2024 yil

Ma'qullandi: 05- January 2024 yil

Nashr qilindi: 09- January 2024 yil

KEY WORDS

teŇsizlik, modul, Koshi teŇsizligi, natural san.

ABSTRACT

Bul maqalada teŇsizliklerdi dálillewde bahalaw usılınıń qollanıwı keltirilgen. Bul usıl teŇsizliklerdi dálillewdiń standart usılı bolıp, tiykarınan teŇsizliktiń aǵzaların joqarıdan yaqı tómenen bahalaw arqalı dálilleybiz. Maqalada bul usıl mısallar arqalı úyrenilgen.

Bul usılda berilgen teŇsizliktiń aǵzaların joqarıdan yamasa tómenen bahalaw arqalı dálilleydi. Aytayıq, bizge $x < y$ ($x > y$) teŇsizligin dálillew kerek bolsın. Sonda egerde biz $x < z$ ($x > z$) hám $z < y$ ($z > y$) teŇsizliklerin dálilley alsaq, onda teŇsizliktiń tranzitivlik qásiyeti boyınsha $x < y$ ($x > y$) teŇsizligi dálillengen bolıp shıǵadı. Bul usıldı teŇsizlikti joqarıdan (tómenen) bahalaw usılı menen dálillew dep ataydı.

Endi usı usılǵa mısallar qarastramız.

1-misal. $a^2 + b^2 = 1$ hám $c^2 + d^2 = 1$ shártlerin qanaatlandıratuǵın qálegen haqıqiy a, b, c, d sanları ushın $|ab - cd| \leq 1$ teŇsizliginiń orınlı bolatuǵınlıǵın dálilleń.

Dálillew. 1-usıl. TeŇsizlikti joqarıdan bahalaw usılı menen dálilleybiz. Modulniń qásiyeti boyınsha

$$|ac - bd| \leq |ac| + |bd| = \sqrt{a^2 \cdot c^2} + \sqrt{b^2 \cdot d^2}$$

teŇsizligi orınlı boladı. Endi teŇsizligimizge Koshi teŇsizligin qollanatuǵın bolsaq, onda tómenдеgi

$$\sqrt{a^2 \cdot c^2} + \sqrt{b^2 \cdot d^2} \leq \frac{a^2 + c^2}{2} + \frac{b^2 + d^2}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2} = 1$$

teŇsizligi orınlı boladı. Demek, berilgen teŇsizliktiń orınlı ekenligi dálillendi.

2-usıl. Endi usı teŇsizlikti tómenen bahalaw usılı menen dálilleyik. Máseleniń shárti boyınsha $a^2 + b^2 = 1$ hám $c^2 + d^2 = 1$ ekenligin bile otırıp, tómenдеgilerdi tabamız:

$$\begin{aligned}
 1 &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = \\
 &= (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 = \\
 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 \geq (ac - bd)^2.
 \end{aligned}$$

Sebebi, a, b, c, d sanlarini qalegen haqiqiy manislerinde $(ad + bc)^2$ a'latpası tek teris emes manisler qabil etedi. So'ngi qatnastan $|ac - bd| \leq 1$ ekenligi kelip shıgadı.

Demek, berilgen te'nsizlik orinli ekenligi d'alillendi.

2-misal. Qalegen natural $n \geq 2$ sanı ushın

$$\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1}{2}$$

te'nsizligi orinli bolatu'gınlıgı d'alilleń.

D'alillew. Qalegen natural $k \geq 2$ sanı ushın $1 - \frac{1}{k^3} > 1 - \frac{1}{k^2}$ te'nsizligi orinli

bol'ganlıqtan

$$\begin{aligned}
 &\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \\
 &= \frac{2^2 - 1}{2^2} \cdot \frac{3^2 - 1}{3^2} \cdot \frac{4^2 - 1}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \\
 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

te'nsizligi orinli boladı.

3-misal. Qalegen $n \in N$ ushın

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 3$$

te'nsizligi orinli bolıwın d'alilleń.

D'alillew. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ekenligin bile otırp, te'nsizliktiń shep ja'gın bahalaymız.

Sonda

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \\
 &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} < 2
 \end{aligned}$$

te'nsizligi orinli boladı.

4-misal. Eger $a, b, c \geq 0$ bolsa, onda

$$\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} + \frac{c}{1+c^2} \leq \frac{3}{2}$$

teńsizliginiń orınlı bolwın dálilleń.

Dálillew. Eger $a=b=c=0$ bolsa, onda berilgen teńsizlik orınlı boladı. Onda biz $a, b, c > 0$ bolsın dep alayıq. Sonda

$$\sum_{cyc} \frac{a}{1+a^2} = \sum_{cyc} \frac{1}{a + \frac{1}{a}} = \left[a + \frac{1}{a} \geq 2 \right] \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

ekenligi kelip shıǵadı. Sonıń menen, berilgen teńsizliktiń durıslıǵı dálillendi.

Paydalanılǵan ádebiyatlar:

1. Ne'matjon Kamalov, To'liqin Olimbayev. «Matematikadan sirtqi olimpiada masalalari». Urganch, 2020.
2. O.B.Boranbaev, A.T.Sadullaev, A.A.Raxmanov. «Algebralıq teńsizliklerdi dálillewge baylanıslı máseleler». Nókis, 2023.
3. Pham Kim Hung. «Secrets in Inequalities». Gil Publishing House, 2007.
4. Hayk Sedrakyan, Nairi Sedrakyan. «The Stair-Step Approach in Mathematics». Springer International Publishing AG 2018.

INNOVATIVE
ACADEMY