



## KASR TARTIBLI HOSILALARGA BO'LGAN ILK QARASHLAR.

**Latipova Shahnoza Salim qizi**

Osiyo Xalqaro Universiteti

“Umumtexnik fanlar” kafedrası o’qituvchisi

slatipova543@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.10686629>

### ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 10-February 2024 yil

Ma’qullandi: 15- February 2024 yil

Nashr qilindi: 21- February 2024 yil

### KEY WORDS

*Hosila, Kaputo, maksimum, Mittag-Leffler, Gamma funksiya.*

### ABSTRACT

“Hosila” atamasi derivee degan fransuzcha so’zning rus tiliga aynan tarjimasidir, bu atamani 1797-yilda J.Lagranj hozirgi  $y', f', y'', f''$  belgilashlarni ham kiritgan. Kasr tartibli hosilalarni aniqlashga bo’lgan birinchi urinishlar. Kasr tartibli hosila va integrallar mavzusi ko’p yillik tarixga ega bo’lishiga qaramasdan uni zamonaviy tadqiqot obyekti sifatida qarash mumkin. Aslida bu haqida Leybnits(1695-1697) va Eylar o’z kitoblarida yozib qoldirishgan.

Differensial tenglamalar nazariyasida (butun yoki kasr tartibli) ikki xil masalalar mavjud: to’g’ri va teskari masalalar. Bu masalalar qanday aniqlanadi? Quyidagi keltirilgan na’munada boshlang’ich-chegaraviy masalani qaraymiz:

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - a(x,t)\Delta u(x,t) &= f(x,t), & x \in \Omega \subset R^N, t > 0, \\ u(x,t) &= \psi(x,t), & x \in \partial\Omega, t \geq 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), & x \in \Omega, \end{aligned}$$

bu yerda  $\Delta u(x,t) = \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(x,t)$  — Laplas operatori.

Shuni takidlab o’tamizki, matematik fizika tenglamalari uchun teskari masalalarni o’rganishga bo’lgan qiziqish ularning zamonaviy fanning ko’plab sohalarida, jumladan, mexanika seysmologiya, tibbiy tomografiya, epidemoya va geofizikada qo’llanishining muhimligi bilan bog’liq. Ko’pgina tadqiqotlar subdiffuziya tenglamalarining o’ng tomonini aniqlashning teskari muammolariga bag’ishlangan.

Ushbu ma’ruzalar teskari masalalarning boshqa muhim turiga, ya’ni kasr hosilasining tartibini aniqlashga bag’ishlangan. Aytaylik, qandaydir jarayonni real hayotdan modellashtirishda biz kasr tartibli tenglamaga kelamiz

$$\partial_t^\rho u(x,t) = a(x,t)\Delta u(x,t) + f(x,t), \quad \rho \in (0,1)$$

Amaliy misollardan biri bu COVID-19 epidemiyasining modellashtirishdir. Jons Hopkins Universiteti tomonidan turli mamlakatlardagi epidemoya haqida taqdim etilgan ma’lumotlar kasr tartibli dinamik jarayonlar ekanligi ko’rsatdi.

Faraz qilamiz  $\rho$  noma'lum.  $a(x,t)$  va  $f(x,t)$  ni o'lchash va aniqlashning ko'pgina usullari va uskunalari mavjud. Lekin, afsuski, hosilaning  $\rho$  tartibini o'lchash uchun hech qanday uskuna yo'q.

Modelning kasrli tartib aniqlash muammosi ko'plab tadqiqotchilar tomonidan ko'rib chiqilgan. E'tibor bering, barcha nashrlar Kaputo ma'nosida  $0 < \rho < 1$  tartibdagi kasr hosilasini qabul qilgan va asosan o'ziga xoslik muammosini o'rgangan.

Yana bir eslatma.  $\rho$  qo'shimcha noma'lum bo'lgani uchun uni topish uchun yana bir shart kerak. Shunday qilib, barcha ma'lum ishlarda mualliflar qo'shimcha shart sifatida quyidagi shartdan foydalanganlar:

$$u(x_0, t) = h(t), \quad 0 < t < T,$$

$x_0 \in \Omega$  kuzatish nuqtasida.

Bu holat tabiiy ko'rinadi: biz hosilaning  $t$  ga nisbatan tartibini qidirayotganimiz sababli, biz uzoq vaqt davomida yechimning tabiatini bilishimiz kerak.

Biroq, bu shartdan foydalanib, qoida tariqasida, faqat  $\rho$  parametrning o'ziga xosligini isbotlash mumkin. Istisno tariqasi " Janno, J. Determination of the order of fractional derivative and a kernel in a an inverse problem for a generalized time-fractional diffusion equation. Electronic J. Differensial Equations V. 216(201), pp. 1-28," ishida mavjudlik va yagonalik isbotlangan.

**1-masala.** Agar qo'shimcha ma'lumot

$$F(u(\cdot, t_0)) = d_0, \quad (1)$$

$F$  chiziqli funksional ( $u(x_0, t) = d_0(t), 0 < t < T$ ), ko'rinishda berilgan bo'lsa, bu yerdan kasr tartibli hosilaning tartibini aniqlash mumkinmi ?

Ushbu ma'ruzalar turkumida (1) ko'rinishdagi yangi ortig'i bilan (qo'shimcha) aniqlangan shartlar asosida kasr tartibli hosilalarni aniqlashning teskari masalasini yechishning ikkita usulini taklif qilamiz. Shunday qilib, biz 1-muammoning ijobiy yechimini beramiz.

Ushbu usullarning afzalligi shundaki, bu usullar noma'lum parametrning o'ziga yagonaligini ham, uning mavjudligini ham isbotlay oladi. Bundan tashqari, bu usul Riman-Liuvill hosilalarini ham o'z ichiga olgan subdiffuziya tenglamalariga qo'llanishi mumkin. Ushbu usulni kasr tartibli tenglamalariga (ya'ni  $p \in (1, 2)$ ) va aralash turdagi ba'zi tenglamalarga ham qo'llash mumkin.

Jons Hopkins universiteti tomonidan turli mamlakatlardan COVID-19 tarqalishi to'g'risida taqdim etilgan ma'lumotlar shuni ko'rsatadiki, bu muammuda  $\rho$  kasr tartibli hosilar  $(0, 1)$  oraliqda joylashgan bo'ladi. Afsuski, ushbu parameter  $\rho$  ni aniq o'lchay oladigan qurilma yo'q. Umarov va uning ham kasblari turli xil  $\rho$  parametrlarni sinab ko'rdilar, ammo kerakli natijaga erisha olamdilar. Keyin biz ushbu parametrni topishning analitik usulini izlay boshladik. Bunda biz  $\rho$  **kasr hosilasining tartibini aniqlashning teskari masalasi** deb ataladigan masalaga keldik. Bu qo'shimcha noma'lum bo'lgani uchun yana bir qo'shimcha shart talab qilishimiz kerak. Bu teskari masalaning murakkabligi aynan shu qo'shimcha shartni topishdadir. Bir tomondan, bu holat osongina tekshirilishi kerak va boshqa tomondan, u  $\rho$  parametrning ham yagonaligi, ham mavjudligini ta'minlashi kerak. Aynan shu shartni biz ma'ruzalarimizda topamiz.

1-bob. Kasr tartibli hosilalar. Mittag-Leffler funksiyalari. Sobolevning joylashish teoremasi. Elliptik operatorlarning kasr tartibli darajalari.

1.1- bo'lim. Kasr tartibli hosilalar. Mittag-Leffler funksiyalari.

1.1.1- qisman bo'lib. Kasr tartibli hosilalarni aniqlashga bo'lgan birinchi urinishlar.

$f^{(\frac{1}{2})}(x)$  hosilasi tushunchasi paydo bo'lishi bilanoq, darhol savol tug'ildi:  $f^{(\frac{1}{2})}(x)$  ning hosilasini aniqlash mumkin-mi? 1695-yilda G. Leybnits (1646-1716) Lopitalga (Matquis de L'Hopital (1661-1704)) yozgan maktublarida  $1/2$  tartibli hosilalarni ko'rib chiqish imkoniyati haqida bir qancha fikrlarni bildirgan.

Birinchi qadamni 1739-yilda L. Eyler qo'ydi va u darajali funksiyaning

$$(x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

hosilasi butun bo'lmagan  $k$  uchun ma'noga ega bo'lishini payqadi. Shu munosabat bilan u umumlashgan faktorialni kiritdi, biz uni hozir Eylerning gamma funksiyasi deb ataymiz:

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Funksiyalarning keng sinfini darajali qatorlar shaklida yozish mumkinligi sababli, bunday funksiyalar uchun kasr tartibli hosilalarni shu tarzda aniqlash mumkin.

Keyingi qadamni 1822-yilda J. Fury'e (1768-1830) qo'yib, butun bo'lmagan tartibli hosilani aniqlash uchun quyidagi tenglikdan foydalanishni taklif qildi:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k e^{ikx}, \quad f_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy,$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (ik)^k f_k e^{ikx}.$$

Bu har qanday musbat tartib va har qanday (yetarlicha "yaxshi") funksiya hosilasining birinchi ta'ri fi edi.

Yuqorida keltirilgan faktlar faqat kasr hisobning tarixidan oldingi davrdir. Haqiqiy hikoya N. Abel (1802-1829) va J. Liuvill (1809-1882) asarlaridan boshlangan. 1823 va 1826 yillarda nashr etilgan asarlarida N. G. Abel tautoxron muammosini o'rganib chiqdi. Bu muammoni yechish uchun u integral tenglamani oldi:

$$A_{\alpha} \varphi(x) = \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt = f(x), \quad x > a, \quad 0 < \alpha < 1,$$

bu yerda  $\varphi(t)$  tautoxron masalaning yechimini beruvchi egri chiziq. Abel bu tenglamani yechdi va  $A_{\alpha}$  ga teskari operatorni topdi:

$$\varphi(x) = R_{\alpha} f(x).$$

Keyinchalik ma'lum bo'lishicha,  $A_{\alpha}$  bu  $1-\alpha$  tartibli kasr integratsiya amali,  $R_{\alpha}$  esa kasr differensiallash amalidir. Biroq, bu ta'riflar keyinroq paydo bo'ldi.

Tautoxron masalasini eslatib o'tamiz. Egri chiziqning har qanday joyiga qo'yilgan to'p, pastga bir xil vaqtda tushadigan egri chiziq topish masalasi. (Bunday egri chiziq mavjud, chunki egri chiziqning turli nuqtalarida tortishish kuchi har xil.)

1832-1837 yillarda Abel ijodi bilan tanishgan J. Liuvill bir qator asarlar yozgan. Ushbu

ishlarda u kasr integro-differensial nazarariyasini yetarlicha to'liq yaratdi.

J. Liuvill asarlaridan keyin B. Riman (1826-1866) asarini muhim o'ringa qo'yish kerak. B.Riman biz hozir qo'llayotgan integro-differensiallash nazariyasini yaratdi: u ksr integral va hosilalarni aniqladi va ularning xossalarini o'rganidi. Bu asarlar turkumini 1847-yilda talabalik yillarida tugatgan, ammo ular vafotidan 10 yil o'tib, 1876 yilda nashr etilgan.

2-bob. Subdiffuziya tenglamalari uchun to'g'ri masalaning klassik yechimi va teskari masalalarni yechishning birinchi usuli.

2.1- qismiy bo'lim. Masalaning qo'yilishi.

$\rho \in (0,1)$  o'zgarmas son va  $A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$  — elliptik operator bo'lsin.

Ushbu boshlang'ich-chegaraviy masalani qaraymiz (to'g'ri masala)

$$\partial_t^\rho u(x,t) + A(D)u(x,t) = 0, \quad x \in T^N, \quad 0 < t \leq T, \quad (36)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \partial_t^{\rho-1} u(x,t) = \varphi(x), \quad x \in T^N. \quad (37)$$

Chegaraviy shartlar o'rniga har bir  $x_j$  argument bo'yicha  $2\pi$  -davriy funksiyalarni qaraymiz va faraz qilamiz  $\varphi(x)$  ham  $x_j$  bo'yicha  $2\pi$  davriy bo'lsin.

Ta'rif 8.  $2\pi$  davriy  $u(x,t)$  funksiya ushbu

$$1) \partial_t^\rho u(x,t), A(D)u(x,t) \in C(T \times (0, \infty))$$

$$2) \partial_t^{\rho-1} u(x,t) \in C(T \times [0, \infty))$$

xossalarga ega bo'lsa va (36)-(37) masalaning shartlarini klassik ma'noda qanoatlantirsa, bu funksiya (36)-(37) to'g'ri masalaning klassik (yoki oddiy) yechimi deyiladi.

Quyida to'g'ri masala uchun asosiy natija keltirilgan.

Teorema 9. Faraz qilamiz  $a > \frac{M}{2m}$  va  $\varphi \in D(A_T^a)$  bo'lsin. U holda (36)-(37) boshlang'ich-chegaraviy masalaning yechimi mavjud va

$$u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n t^{\rho-1} E_{\rho,\rho}(-A^2(n)t^\rho) e^{inx}, \quad (38)$$

ko'rinishda bo'lib, ushbu qator  $x \in T^N$  da va har bir  $t \in (0, T]$  da absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi, bu yerda  $\varphi_n$  ifoda  $\varphi$  ning Fury'e koeffitsientlaridir. Bundan tashqari, galma-gal  $\partial_t^\rho$  va  $A(D)$  operatorlarni qo'llashdan hosil qilingan qator ham  $x \in T^N$  da va har bir  $t \in (0, T]$  da absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

### Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati:

1. Latipova, S. (2024). YUQORI SINF GEOMETRIYA MAVZUSINI O'QITISHDA YANGI PEDAGOGIK TEXNOLOGIYALAR VA METODLAR. SINKVEYN METODI, VENN DIAGRAMMASI METODLARI HAQIDA. Theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences, 3(3), 165-173.
2. Latipova, S. (2024, February). SAVOL-JAVOB METODI, BURCHAKLAR METODI, DEBAT (BAHS) METODLARI YORDAMIDA GEOMETRIYANI O'RGANISH. In Международная конференция академических наук (Vol. 3, No. 2, pp. 25-33).
3. Latipova, S., & Sharipova, M. (2024). KESIK PIRAMIDA MAVZUSIDA FOYDALANILADIGAN YANGI PEDAGOGIK TEXNOLOGIYALAR.

- 6X6X6 METODI, BBB (BILARDIM, BILMOQCHIMAN, BILIB OLDIM) METODLARI HAQIDA. Current approaches and new research in modern sciences, 3(2), 40-48.
4. Latipova, S. (2024). 10-11 SINFLARDA STEREOMETRIYA OQITISHNING ILMIY VA NAZARIY ASOSLARI. Академические исследования в современной науке, 3(6), 27-35.
5. Latipova, S. (2024). HILFER HOSILASI VA UNI HISOBLASH USULLARI. Центральноазиатский журнал образования и инноваций, 3(2), 122-130.
6. Latipova, S. (2024). HILFER MA'NOSIDA KASR TARTIBLI TENGLAMALAR UCHUN KOSHI MASALASI. Development and innovations in science, 3(2), 58-70.
7. Latipova, S. (2024). KESIK PIRAMIDA TUSHUNCHASI. KESIK PIRAMIDANING YON SIRTINI TOPISH FORMULALARI. Models and methods in modern science, 3(2), 58-71.
8. Shahnoza, L. (2023, March). KASR TARTIBLI TENGLAMALARDA MANBA VA BOSHLANG'ICH FUNKSIYANI ANIQLASH BO'YICHA TESKARI MASALALAR. In " Conference on Universal Science Research 2023" (Vol. 1, No. 3, pp. 8-10).
9. qizi Latipova, S. S. (2024). CAPUTO MA'NOSIDAGI KASR TARTIBLI TENGLAMALARDA MANBA FUNKSIYANI ANIQLASH BO 'YICHA TO 'G 'RI MASALALAR. GOLDEN BRAIN, 2(1), 375-382.
10. Latipova, S. S. (2023). SOLVING THE INVERSE PROBLEM OF FINDING THE SOURCE FUNCTION IN FRACTIONAL ORDER EQUATIONS. Modern Scientific Research International Scientific Journal, 1(10), 13-23.
11. Sharipova, M., & Latipova, S. (2024). TAKRORIY GRUPPALASHLAR. Development of pedagogical technologies in modern sciences, 3(3), 134-142.
12. Sharipova, M. (2024). TAQQOSLAMA TUSHUNCHASI VA UNING XOSSALARI. Current approaches and new research in modern sciences, 3(2), 68-78.
13. Sharipova, M. (2024). IKKI O'ZGARUVCHILI TENGSIZLIKLAR SISTEMASINI TAQQOSLAMALAR USULI BILAN YECHISH. Development and innovations in science, 3(2), 97-105.
14. Sharipova, M. (2024). BIRINCHI DARAJALI TAQQOSLAMALARNI YECHISH USULLARI. Solution of social problems in management and economy, 3(2), 60-69.
15. Latipova, S., & Sharipova, M. (2024). KESIK PIRAMIDA MAVZUSIDA FOYDALANILADIGAN YANGI PEDAGOGIK TEXNOLOGIYALAR. 6X6X6 METODI, BBB (BILARDIM, BILMOQCHIMAN, BILIB OLDIM) METODLARI HAQIDA. Current approaches and new research in modern sciences, 3(2), 40-48.
16. Sharipova, M. (2024). IN THE FORM OF AN UNBOUNDED PARALLELEPIPED IN THE FIELD NONLOCAL BORDERLINE CONDITIONAL LINEAR THE REVERSE IS THE CASE. Science and innovation in the education system, 3(1), 105-116.
17. Sharipova, M. (2024). FUNCTIONAL SPACES. IN SHORT REFLECTION PRINCIPLE. Current approaches and new research in modern sciences, 3(1), 131-142.
18. Sharipova, M. (2024). A IS CORRECT OF THE INTEGRAL TO THE ECONOMY APPLICATIONS. Solution of social problems in management and economy, 3(1), 116-125.
19. Sharipova, M. (2024). ASYMMETRY AND KURTOSIS COEFFICIENTS. Theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences, 3(1), 216-225.
20. Sharipova, M. (2024). TWO MULTIPLE OF THE INTEGRAL APPLICATIONS. Инновационные исследования в науке, 3(1), 135-140.
21. Sharipova, M. P. L. (2023). CAPUTA MA'NOSIDA KASR TARTIBLI HOSILALAR VA UNI

- HISOBLASH USULLARI. Educational Research in Universal Sciences, 2(9), 360-365.
22. Sharipova, M. P. (2023). MAXSUS SOHALARDA KARLEMAN MATRITSASI. Educational Research in Universal Sciences, 2(10), 137-141.
23. Madina Polatovna Sharipova. (2023). APPROXIMATION OF FUNCTIONS WITH COEFFICIENTS. American Journal of Public Diplomacy and International Studies (2993-2157), 1(9), 135-138.
24. Bobokulova, M. (2024). IN MEDICINE FROM ECHOPHRAPHY USE. Development and innovations in science, 3(1), 94-103.
25. Bobokulova, M. (2024). INTERPRETATION OF QUANTUM THEORY AND ITS ROLE IN NATURE. Models and methods in modern science, 3(1), 94-109.
26. Bobokulova, M. (2024, January). RADIO WAVE SURGERY. In Международная конференция академических наук (Vol. 3, No. 1, pp. 56-66).
27. Bobokulova, M. (2024). UNCERTAINTY IN THE HEISENBERG UNCERTAINTY PRINCIPLE. Академические исследования в современной науке, 3(2), 80-96.
28. Bobokulova, M. (2024). BLOOD ROTATION OF THE SYSTEM PHYSICIST BASICS. Инновационные исследования в науке, 3(1), 64-74.
29. Bobokulova, M. (2024). THE ROLE OF NANOTECHNOLOGY IN MODERN PHYSICS. Development and innovations in science, 3(1), 145-153.
30. Bobokulova, M. X. (2023). STOMATOLOGIK MATERIALLARNING FIZIK-MEXANIK XOSSALARI. Educational Research in Universal Sciences, 2(9), 223-228.
31. Хамройевна, В. М. (2023). ORGANIZM TO 'QIMALARINING ZICHLIGINI ANIQLASH. GOLDEN BRAIN, 1(34), 50-58.
32. Bobokulova, M. K. (2023). IMPORTANCE OF FIBER OPTIC DEVICES IN MEDICINE. Multidisciplinary Journal of Science and Technology, 3(5), 212-216.
33. Khamroyevna, M. B. (2023). PHYSICO-CHEMICAL PROPERTIES OF BIOLOGICAL MEMBRANES, BIOPHYSICAL MECHANISMS OF MOVEMENT OF SUBSTANCES IN THE MEMBRANE. Multidisciplinary Journal of Science and Technology, 3(5), 217-221.
34. Bobokulova, M. K. (2024). TOLALI OPTIKA ASBOBLARINING TIBBIYOTDAGI AHAMIYATI. GOLDEN BRAIN, 2(1), 517-524.