НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПАРАМЕТРНЫХ ЗАДАЧ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛАХ

Собирову Динару Умиджон кызы
Нукусский государственный педагогический
институт имени Ажинияза,
город Нукус, Ўзбекистан
https://doi.org/10.5281/zenodo.15362262

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 01-May 2025 yil
Ma'qullandi: 05-May 2025 yil
Nashr qilindi: 08-May 2025 yil

KEY WORDS

параметр, функция, четной, уравнение, решение.

ABSTRACT

В данной статье рассмотрены некоторые способы решения задач с параметрами. Функция y=f(x), для которой не выполнено хотя бы одно из условий определения четности или нечетности функции, называется функцией общего вида

Функция называется четной, если выполняются 2 условия:
1. Область определения D(f) симметрична относительно нуля
2. Для любого x из D(f) выполняется равенство $f(-x) = f(x)$

Геометрическая интерпретация:
График четной функции симметричен относительно оси ординат
Функция называется нечетной если выполняются 2 условия:
1. Область определения D(f) симметрична относительно нуля
2. Для любого x из D(f) выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$

Геометрическая интерпретация:
График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Функция y=f(x), для которой не выполнено хотя бы одно из условий определения четности или нечетности функции, называется функцией общего вида. График функции общего вида не обладает симметрией ни относительно оси Oy, ни относительно начала координат.

Теперь рассмотрим задачу с параметром, которую удобно решать функциональным методом, ссылаясь на четность функции.

Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$x^2 + (a+7)^2 = |x-7-a| + |x+a+7|$ имеет единственное решение

Решение:
$$x^2 + (a+7)^2 = |x-7-a| + |x+a+7| \Leftrightarrow x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7| = 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + (a+7)^2 - |x-7-a| - |x+a+7|$ и исследуем ее на четность.

$D(f) = R$ - симметрична относительно нуля

$$f(-x)=(-x)^2+(a+7)^2-\left|-x-7-a\right|-\left|-x+a+7\right|=$$
$$(-x)^2+(a+7)^2-\left|(-1)(x+7+a\right|-\left|(-1)(x-a-7\right|=$$
$$(-x)^2+(a+7)^2-\left|-1\right|\left|x+7+a\right|-\left|-1\right|\left|x-a-7\right|=x^2+(a+7)^2-\left|x+7+a\right|-$$
$$-\left|x-a-7\right|=f(x)$$

Таким образом данная функция четная и по условию задачи нам надо найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение f(x)=0 имеет единственное решение, т.е при которых график этой функции пересечет ось Ох в одной точке, а так как функция четная, то ее график симметричен относительно оси Оу, т.е. если число $x_0 \neq 0$ - решение уравнения, то число - x_0 также является его решением (рис 1)

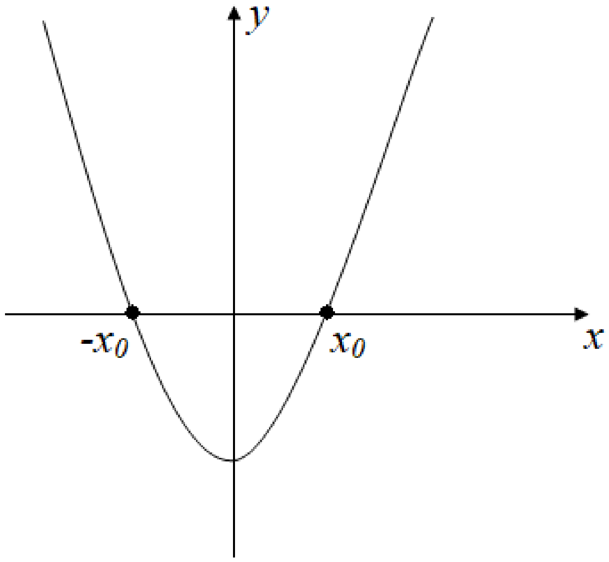

Рисунок 1

Очевидно, что уравнение будет иметь единственный корень, если этот корень равен нулю(рис 2)

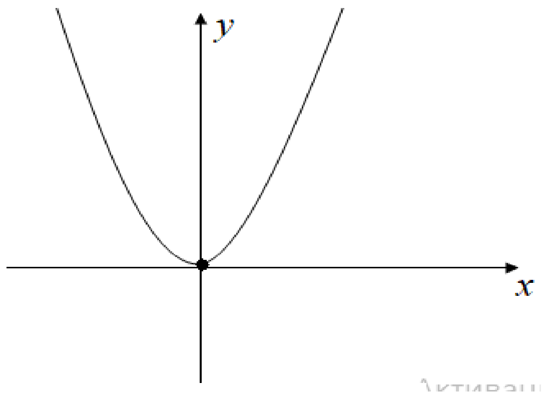

Рисунок 2

Поэтому для решения задачи мы сначала найдем все значения параметра а, при которых число x=0 является корнем уравнения, а затем из найденных значений параметра а исключим те, при которых x=0 не единственный корень. Подставляем x=0 в уравнение f(x)=0, получим f(0)=0 т.е.

$) + (a+7)^2 - |-7-a| - |a+7| = 0 \Leftrightarrow (a+7)^2 - |(-1)(a+7)| - |a+7| = 0 \Leftrightarrow$

$(a+7)^2 - 2|a+7| = 0 \Leftrightarrow |a+7|^2 - 2|a+7| = 0 \Leftrightarrow |a+7|^2 - 2|a+7| = 0 \Leftrightarrow$

0+ $|a+7|(|a+7|-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |a+7| = 0 \\ |a+7|-2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+7 = 0 \\ |a+7| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+7 = 0 \\ a+7 = 2 \\ a+7 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} a = -7 \\ a = -9 \\ a = -5 \end{array}\right.$

Т.е при этих значениях параметра а x=0 является корнем уравнения, теперь исключаем те, при которых этот корень не единственный. Для этого делаем обычную поверку: подставляем полученные значения параметра а в уравнение f(x)=0

1) при а=-7

$f(x) = x^2 + (-7+7)^2 - |x| - |x|$

$f(x) = x^2 - 2|x| \Rightarrow x^2 - 2|x| = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| = 0 \Leftrightarrow |x|(|x|-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 0 \\ |x|-2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x| = 0 \\ |x| = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$ получаем, что при а=-7 решение уравнения не единственное.

Таким образом а=-7 не удовлетворяет требованиям задачи.

2) если а=-9

$f(x) = x^2 + (-9+7)^2 - |x-7+9| - |x-9+7|$

$f(x) = x^2 + 4 - |x+2| - |x-2|$

Получаем, $x^2 + 4 - |x+2| - |x-2| = 0$

Рассматриваем нули модулей: $\left[\begin{array}{l} x+2 = 0 \\ x-2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (рис 4)

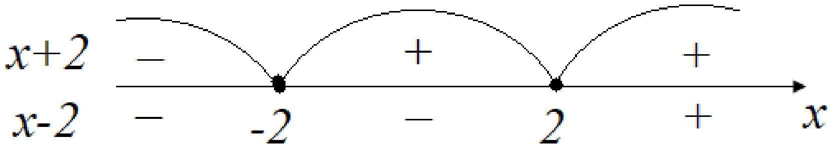

Рисунок 4

$x^2 + 4 - (-x-2) - (-x+2) = 0$

Если x<-2, то $x^2 + 4 + x + 2 + x - 2 = 0$

$x^2 + 2x + 4 = 0$

Дискриминант этого квадратного уравнения D<0, значит уравнение не имеет действительных корней.

$x^2 + 4 - (-x-2) - (-x+2) = 0$

Если $-2 \le x$<2, то $x^2 + 4 - x - 2 + x - 2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Заметим,что x=0 удовлетворяет условию $-2 \le x$<2,

$$x^2+4-(x+2)-(x-2)=0$$

Если $x\geq 2$, $x^2+4-x-2-x+2=0$

$$x^2-2x+4=0$$

Дискриминант этого квадратного уравнения D<0,

значит уравнение не имеет действительных корней.

Таким образом при a=-9 получаем уравнение, которое имеет единственное решение x=0. Значит a=-9 удовлетворяет требованию задачи.

3) при a=-5, получаем

$$f(x)=x^2+(-5+7)^2-|x-7+5|-|x-5+7|$$

$$f(x)=x^2+4-|x-2|-|x+2|$$

Получаем уравнение $x^2+4-|x-2|-|x+2|=0$

Мы получаем уравнение такое же как и предыдущем случае, значит это уравнение также имеет единственное решение x=0. Таким образом значение параметра a=-5 удовлетволяет требованию задачи.

Получаем Ответ: a=-9 и a=-5

Литература:

1. Козко А.И., Чирский В. Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. — М.: МЦНМО, 2007 — 296 с. ISBN 978-5-94057-270-1

2. Важенин Ю.М. Самоучитель решения задач с параметрами. Екатеринбург:УрГУ, 1996, 84 с.

INNOVATIVE ACADEMY