



KOMMUTATIV BANAX ALGEBRALARINING LOKAL AVTOMORFIZMLARI UCHUN NORMANI SAQLASH SHARTLARI

Karimov Hakimbek Karimovich

Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universiteti Algebra va funksional
analiz kafedrası assistenti

Zuhra Ollanazarova

Qoraqalpoq davlat universiteti 2-kurs magistranti

<https://doi.org/10.5281/zenodo.18538347>

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 05- fevral 2026 yil
Ma'qullandi: 07- fevral 2026 yil
Nashr qilindi: 09- fevral 2026 yil

KEY WORDS

Kommutativ Banax algebralari, lokal avtomorfizmlar, normani saqlash shartlari, izometriya, Gelfand spektri, Shilov chegarasi, semisimple algebralr, 2-lokal avtomorfizmlar, spektral radius, multiplikativ funksionallar, preserver problems, operatorlar algebrasi.

ABSTRACT

Maqolada kommutativ Banax algebralarda lokal avtomorfizmlarning xossalari, ularning global avtomorfizm bo'lish shartlari va normani saqlash xususiyatlari tahlil qilinadi. Shuningdek, sohadagi o'zbek va xorijiy olimlarning so'nggi yillardagi tadqiqotlariga tayangan holda ilmiy xulosalar keltiriladi..

Banax algebralari nazariyasida operatorlarning strukturaviy xossalarini o'rganish 20-asrning o'rtalaridan boshlab jadal rivojlandi. Xususan, R.Kadison va I.Singer kabi olimlarning ishlaridan so'ng, algebralardagi derivatsiya va avtomorfizmlarni "local" nuqtayi nazardan o'rganish boshlandi.

Lokal avtomorfizm tushunchasi birinchi bo'lib Larson va Sourour tomonidan 1990-yilda kiritilgan [1]. $T : A \rightarrow A$ Agar chiziqli akslantirish uchun har bir $x \in A$ nuqtada shunday ϕ_x avtomorfizm mavjud bo'lib, $T(x) = \phi_x(x)$ sharti bajarilsa, T ga lokal avtomorfizm deyiladi. Kommutativ Banax algebralari kontekstida lokal avtomorfizmlarni o'rganishda Kovalski va Slodkovski (1992) tomonidan isbotlangan natija fundamental hisoblanadi [2]. Ularning teoremasiga ko'ra, har qanday chiziqli funksional uchun multiplikativlik sharti lokal darajada tekshirilsa, u global multiplikativ bo'ladi. Biroq, normani saqlash masalasi murakkabroq. Kommutativ Banax algebrasida har qanday avtomorfizm avtomatik ravishda uzluksiz bo'ladi, lekin har doim ham izometriya (normani saqlash) bo'lavermaydi.

Normani saqlash shartidan ma'lum, A kommutativ Banax algebrasida T lokal avtomorfizm bo'lsa, u $\|T(x)\| = \|x\|$ shartini qachon qanoatlantirishi asosan algebraning shilovi chegarasi va spektral radiusi bilan bog'liq [3]. O'zbekistonlik matematiklar, xususan Sh. Ayupov, K. Kudaybergenov va ularning shogirdlari operator algebralardagi lokal va 2-lokal derivatsiyalar hamda avtomorfizmlar sohasida jahon miqyosida tan olingan natijalarga ega.

Kommutativ Banax algebrasida T lokal avtomorfizm bo'lsin. Quyidagi shartlar T ning normani saqlashini ta'minlashi mumkin:

1. Ekstremal nuqtalar: Agar algebraning birlik sharining ekstremal nuqtalari to'plami "yaxshi" tuzilgan bo'lsa (masalan, $C(K)$ algebralarida), lokal avtomorfizmlar izometriya bo'ladi.
2. Unitar elementlar: Agar algebra unitar elementlar bilan generatsiyalangan bo'lsa va T lokal avtomorfizm sifatida unitar elementlarni unitar elementlarga o'tkazsa, u normani saqlaydi.
3. Spektral radius: $\|x\| = r(x)$ (bu yerda $r(x)$ - spektral radius) sharti bajariladigan algebralarda (masalan, C^* -algebralarda), har qanday lokal avtomorfizm spektrni saqlaganligi sababli normani ham saqlaydi.

Keling endi, spektral radius va normaning o'zaro aloqasini ko'rib chiqamiz. Banax $F(x) \in \sigma(x)$ algebralarida spektral $\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n}$ radius formulasi norma va spektr o'rtasidagi ko'prikdir. Gleason-Kahane-Zelazko (GKZ) teoremasi $\phi(x) - \phi(y) \in \sigma(x - y)$ kommutativ ϕ Banax algebralarida chiziqli funksionallarning multiplikativligini (ya'ni xarakter ekanligini) faqat ularning spektral xatti-harakatiga qarab aniqlash imkonini berdi. Ushbu teorema bo'yicha, agar F chiziqli funksional bo'lib, $F(1) = 1$ va har bir x uchun bo'lsa, u holda F multiplikativdir. Kowalski va Słodkowski ushbu natijani yanada umumlashtirib, chiziqlilik farazini olib tashlagan holda, sharti bajarilsa, yondashuvning chiziqli va multiplikativ ekanligini isbotladilar. Bu natija lokal avtomorfizmlarning normani saqlash shartlari bilan bevosita bog'liq, chunki normalangan algebralarda spektr va norma bir-birini cheklaydi.

Noassotsiativ algebralarda lokal avtomorfizmlarda yurtimiz olimlarining ham hissasi katta. Akademik Shavkat Ayupov va uning maktabi asosan ne-kommutativ algebralar (fon Neyman algebralari, W^* -algebralar) ustida ishlagan bo'lsa-da, ularning metodologiyasi kommutativ holatlarni tahlil qilishda ham keng qo'llaniladi. K.Kudaybergenovning ishlarida Banax algebralaridagi lokal avtomorfizmlarning chiziqlilik sharti va ularning global ko'rinishga o'tish mexanizmlari batafsil yoritilgan. O'zbek olimlarining natijalari shuni ko'rsatadiki, ko'p hollarda lokal avtomorfizmlar algebraning silsilaviy qismi bilan bog'liq bo'lib, kommutativ holatda bu algebraning spektral xossalari tayanadi.

Ayupov va Kudaybergenovning Alberto Elduque bilan hamkorlikdagi ishlari ixtiyoriy maydon ustidagi Keyli (oktonion) algebralarida lokal va 2-lokal avtomorfizmlarni tavsiflashga bag'ishlangan. Ular isbotladilarki, Keyli algebrasining lokal avtomorfizmlari guruhi birlik elementni saqlovchi ortogonal operatorlar guruhi bilan ustma-ust tushadi:

$$LocAut(C) = \{ \phi \in O(C, n) \mid \phi(1) = 1 \}.$$

Bu yerda n – Keyli algebrasidagi normadir (kvadratik forma) [3]. Bu natija lokal avtomorfizm tushunchasi va normani saqlash (ortogonallik) ortasidagi chuqur bog'liqlikni yoritib beradi. Shuningdek, F. Arzikulov, I. Karimjanov va boshqa o'zbek olimlari Leybnits va Zinbiel algebralarida 2-lokal derivatsiya va avtomorfizmlarni tadqiq etib, nilpotent va filiform holatlar uchun maxsus konstruktsiyalarni ishlab chiqdilar.

Kvant mexanikasi va operatorlar nazariyasidagi tatbiqlar. Lokal avtomorfizmlarning normani saqlash shartlarini o'rganish nafaqat nazariy matematika, balki amaliy fizika uchun

ham muhim. Kvant mexanikasida fizik holatlar va kuzatiladigan miqdorlar o'rtasidagi simmetriyalar ko'pincha operator algebralarining avtomorfizmlari orqali ifodalanadi. Lajos Molnárning ta'kidlashicha, holatlar fazosi va effektlar fazosi ustidagi lokal avtomorfizmlarning global xususiyatga ega bo'lishi kvant tizimlarining vaqt bo'yicha evolyutsiyasi va o'lchov natijalarining barqarorligini kafolatlaydi. Normani saqlash shartlari fizik tizimdagi energiya yoki ehtimollikning saqlanishi bilan uzviy bog'liqdir. Kommutativ Banach algebralarining lokal avtomorfizmlari uchun normani saqlash shartlarini tahlil qilish natijasida quyidagi xulosalarga kelish mumkin:

1. **Algebraik refleksivlikning universalligi:** Ko'plab klassik operator va funksional algebralar (masalan, cheksiz o'lchovli $B(H)$, ayrim differensiallanuvchi funksiya fazolari) algebraik refleksivdir, ya'ni ulardagi har bir lokal avtomorfizm globaldir.
2. **Norma va spektrning fundamental roli:** Normani saqlash (izometriya) yoki spektrni saqlash shartlari lokal yondashuvning chiziqliligi va multiplikativligini ta'minlovchi eng kuchli mezonlardir.
3. **O'zbek matematika maktabining hissasi:** Akademik Shavkat Ayupov boshchiligidagi o'zbek olimlari fon Neyman algebralari, o'lchovli operatorlar va noassotsiativ algebralarda lokal inikoslar nazariyasini sezilarli darajada boyitib, ushbu sohaning jahon miqyosidagi rivojiga munosib hissa qo'shishdi.

Xulosa o'rnida aytishimiz mumkin, kelajakdagi tadqiqotlar no-kommutativ Banach algebralari, kvant guruhlar va topologik algebralarda lokal yondashuvlarining metrik va topologik xususiyatlarini yanada chuqurroq o'rganishga, shuningdek, ularning kvant hisoblashlari va zamonaviy fizikadagi yangi tatbiqlarini topishga qaratilishi lozim.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. Larson D. R., Sourour A. R. "Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proc. Sympos. Pure Math., 1990.
2. Kowalski S., Slodkowski Z. "A characterization of multiplicative linear functionals in Banach algebras". Studia Mathematica, 1992. Larson D. R., Sourour A. R. "Local derivations and local automorphisms of $B(X)$. Proc. Sympos. Pure Math., 1990.
3. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K. "Local derivations and automorphisms on algebras". Journal of Mathematical Sciences, 2014.
4. Molnar L. "Selected Preserver Problems on Algebraic Structures of Linear Operators and on Function Spaces". Springer, 2007.
5. Gelfand I. M., Raikov D. A., Shilov G. E. "Commutative Normed Rings". Chelsea Publishing Company, 1964.