EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

TIXONOV BO‘YICHA KORREKTLIK VA KORREKTLIK TO‘PLAMI. NORMAL YECHIMNI TOPISHNING REGULYARLASHTIRISH USULI

[1]**Nurmatov Zohidjon Obidjonovich**
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti.
“Axborot texnologiyalari” kafedrasi o’qituvchisi.
nurmatovzohidjon35@gmail.com
[2]**To‘rayev Dilmurod Shokir o‘g‘li**
Termiz davlat universiteti,
“Amaliy matematika va informatika” kafedrasi o‘qituvchisi,
turaevdilmurod8@gmail.com
[3]**Pirimova Feruza Abubakir qizi**
Denov tadbirkorlik va pedagogika instituti talabasi.
abubakirovnaferuza005@gmail.com
https://www.doi.org/10.5281/zenodo.7943732

ARTICLE INFO

Received: 08th May 2023
Accepted: 16th May 2023
Online: 17th May 2023

KEY WORDS

Korrektlik to‘plami, normal yechim, norma, regulyarlashtirish usuli.

ABSTRACT

Ushbu maqolada matematika fizikaning nokorrekt masalalarini yechish usullari haqida ma’lumotlar keltirilgan.

KIRISH

Chegaraviy va boshlang‘ich shartlar, ko‘plab xususiy hosilali differensial tenglamalarning mavjud yechimlaridan noma’lumlarni ajratish uchun shakllanadi. Ushbu qo‘shimcha shartlar juda ham ko‘p (yechim mavjud bo‘lishi kerak) va juda ham kam (yechimlar ko‘p bo‘lmasligi kerak) bo‘lmasligi kerak. Bu korrektlik masalasining qo‘yilishi bilan bog‘liq. Avvalo J.Adamarning *korrektlik masalasi* tushunchasiga to‘xtalamiz (korrektlik klassik ma’noda):

Masala korrekt qo‘yilgan deyiladi, agar:

1. Masalaning yechimi mavjud,
2. U yechim yagona,
3. Masalaning yechimi kiruvchi qiymatlarga uzluksiz bog‘liq.

Aynan korrektlikning uchinchi sharti muhim ahamiyatga ega, u kiruvchi qiymatlarning kichik o‘zgarishida yechimning kichik o‘zgarishini ta’minlaydi. Kiruvchi qiymatlardan tenglama koeffitsientlari, o‘ng qismi, chegaraviy va boshlang‘ich qiymatlar kelib chiqadi, ular eksperimentdan olinadi va har doim ba’zi xatoliklari bilan taniqli. Yechimning turg‘unligi boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning kichik xatolari, koeffitsientlar va o‘ng qismiga taaluqligi bo‘yicha to‘liq masalaning qo‘yilishini va butun tadqiqotdagi bahosini oqlaydi.

Matematika-fizika tenglamalari uchun chegaraviy masalalarni qarab chiqishda mavjudlik, yagonalik va turg‘unlik teoremalari o‘zlarining jamlanmasida qo‘yilgan masalaning to‘liq korrektlik tadqiqotini ta’minlaydi. Korrektlik sharti u yoki bu masalani qarab chiqayotganda konkretlashtirilishi kerak. Bu shu bilan bog‘liqki, masalaning yechimi va kiruvchi qiymatlar ba’zi to‘liq konkret funksional fazolardagi elementlar sifatida qaraladi. Shuning uchun qo‘yilgan masala fazoning bir tanlovida nokorrekt va boshqasida korrekt bo‘lishi mumkin. Shuning uchun u yoki bu korrekt (nokorrekt) masala absolyut xarakterga ega emas va muhim atamalar bilan kelishi kerak.

ASOSIY QISM

Tixonov bo‘yicha korrektlik va korrektlik to‘plami. Boshlang‘ich Φ fazoda “torayuvchi” hisoblangan ba’zi bir to‘plamdagi φ yechimni izlash g‘oyasi Tixonov bo‘yicha korrektlikni aniqlash asosida yotardi. Operatorli

$$K\varphi = f \tag{1}$$

tenglama yechimi masalasi Tixonov bo‘yicha korrekt qo‘yilgan deb nomalanadi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

1. Apriori ma’lumki, masala yechimi mavjud va Φ yechimlar fazosining ba’zi bir Φ_K to‘plamga tegishli, ya’ni $\varphi \in \Phi_K \subset \Phi$.
2. Yechim Φ_K to‘plamda yagona, ya’ni ixtiyoriy $f \in F_K$ o‘ng qism uchun yagona $\varphi \in \Phi_K$ element mavjud. F_K to‘plam $K\varphi$ elementlardan tashkil topgan, bu yerda $\varphi \in \Phi_K$. Operatorli ko‘rinishda F_K to‘plamni $F_K = K\Phi_K$ munosabat bilan aniqlash mumkin.
3. Agar o‘ng qismdagi variatsiyalar uni F_K to‘plamning chegarasidan chiqarmasa (keyinchalik, φ lar Φ_K ga tegishli bo‘ladi), u holda yechimning o‘ng qismga uzluksiz bog‘liqligi mavjud va teskari K^{-1} operator mavjud va u uzluksiz, keyinchalik, va cheklangan.

F_K shaklidagi K^{-1} operatorning Φ_K to‘plami mavjud va uzluksiz, hamda u *korrektlik to‘plami* deb nomlanadi.

Adamar va Tixonov bo‘yicha korrektlik shartlarini taqqoslash orqali ko‘rishimiz mumkinki, Tixonov bo‘yicha korrektlik Φ_K korrektlik to‘plamigacha boshlang‘ich Φ fazoning torayishi hisobiga erishishi mumkin. Shuning uchun Tixonov bo‘yicha korrektlik masalasini ko‘pincha *shartli korrektlik masalasi* deb atashadi (Adamar bo‘yicha nokorrekt bo‘lishi mumkin).

Korrektlik to‘plamini qurish va undan munosib (mezonlarni aniqlash bo‘yicha) yechimni tanlashning umumiy prinsiplari *nokorrekt qo‘yilgan masalalarning regulyarlashtirish usullarida* qarab chiqiladi.

Normal yechimni topishning regulyarlashtirish usuli.

1. z^0 quyidagi sistemaning normal yechimi bo‘lsin:

$$Az = \bar{u}. \tag{2}$$

Avvalo soddalik uchun faqat o‘ng qism taqribiy, A operator (matritsa) esa – aniq deb olaylik. Demak, $\bar{u}$ ning o‘rniga biz $\tilde{u}$, $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \le \delta$ vektorga ega bo‘laylik, demak (2) sistemaning o‘rniga quyidagi sistemaga ega bo‘lamiz:

$$Az = \tilde{u}. \tag{3}$$

(2) sistemaning normal yechimiga $\tilde{z}_\delta$ taqribiyni topish talab qilinadi, ya'ni $\tilde{z}^0$ vektorga shunday $\tilde{z}_\delta$ topiladiki, $\delta \to 0$ da $\tilde{z}_\delta \to z^0$ bo'ladi. Belgilab o'tamizki, $\bar{u}$ va $\tilde{u}$ vektorlar (ulardan bittasi yoki ikkalasi ham) klassik yechish shartini qanoatlantirmasligi mumkin.

(2) sistema yechilmaydigan bo'lishi mumkinligi sababli, u holda $\inf \|Az - \bar{u}\| = \mu \geq 0$ bo'ladi, bu yerda $\inf$ barcha $z \in R^n$ vektorlar bo'yicha olinadi.

Boshlang'ich berilganlarning aniqligi bo'yicha taqqoslanadigan z vektorlarning Q_δ sinfida z_δ taqribiyni izlash tabiiy, ya'ni $\|Az - \tilde{u}\| \leq \mu + \delta$. Lekin $\bar{u}$ vektorning o'rniga biz $\tilde{u}$ vektorga ega bo'lganligimiz sababli, u holda biz faqat $\tilde{\mu} = \inf\limits_{z \in R^n} \|Az - \tilde{u}\|$ ni topishimiz mumkin. Belgilab o'tamizki, quyidagi oshkor tengsizliklardan:

$$\|Az - \tilde{u}\| \leq \|Az - \bar{u}\| + \|\tilde{u} - \bar{u}\|,$$
$$\|Az - \bar{u}\| \leq \|Az - \tilde{u}\| + \|\tilde{u} - \bar{u}\|$$

$|\tilde{\mu} - \mu| \leq \delta$ tengsizlikka keltiruvchi $\tilde{\mu} \leq \mu + \delta$, $\mu \leq \tilde{\mu} + \delta$ baholar kelib chiqadi. Shuning uchun $\|Az - \tilde{u}\| \leq \tilde{\mu} + 2\delta$ lar uchun z vektorlarning $\tilde{Q}_\delta$ sinfida z^0 normal yechimga $\tilde{z}_\delta$ taqribiyni topamiz. Belgilab o'tamizki, agar (2) sistemaning yechilishi haqidagi ma'lumotga ega bo'lsak, u holda $\mu = 0$ va $\tilde{Q}_\delta$ sinf sifatida $\|Az - \tilde{u}\| \leq \delta$ lar uchun z vektorlar sinfini olish mumkin. $\tilde{Q}_\delta$ sinf taqribiy yechimlarning mumkin bo'lgan rasmiy sinfi hisoblanadi. Lekin $\tilde{z}_\delta$ sifatida $\tilde{Q}_\delta$ sinfdan ixtiyoriy vektorni olish mumkin emas, chunki bunday "yaqinlashish" (3) tenglamaning o'ng qismidagi kichik o'zgarishlarga noturg'un bo'ladi. Bizga saralash prinsipi zarur bo'ladi. U tabiiy ravishda masalaning qo'yilishidan kelib chiqadi. Aslida normal yechimni aniqlashga binoan z^0 boshlang'ich yechim minimal normali psevdoyechim bo'lishi kerak. Shuning uchun z^0 ga yaqinlashuvchi sifatida $\tilde{Q}_\delta$ to'plamdagi $\Omega[z] = \|z\|^2$ funksionalni minimallashtiradigan $\tilde{Q}_\delta$ dagi $\tilde{z}_\delta$ vektorni olish tabiiy.

Shu tarzda, masala z vektorlarning $\tilde{Q}_\delta$ to'plamdagi $\Omega[z] = \|z\|^2$ minimallashtirish funksionaliga keltiriladi, unda $\|Az - \tilde{u}\| \leq \tilde{\mu} + 2\delta$ shart bajariladi.

2. z_δ - $\tilde{Q}_\delta$ dagi vektor bo'lsin, unda $\|z\|^2$ funksional $\tilde{Q}_\delta$ to'plamda minimumga erishadi. Uni (3) tenglamaning $\tilde{u}$ o'ng qismiga δ parametrga bog'liq bo'lgan ba'zi bir $R_1(\tilde{u}, \delta)$ operatorni qo'llash natijasi sifatida qarab chiqish mumkin. Quyidagi teorema o'rinli:

Teorema 1. $R_1(\tilde{u}, \delta)$ operator quyidagi xususiyatlarga ega:

1) u har qanday $\tilde{u} \in R^m$ va ixtiyoriy $\delta > 0$ uchun aniqlangan;

2) $\delta \to 0$ da $z_\delta = R_1(\tilde{u}, \delta)$ $Az = \bar{u}$ tenglamaning z^0 normal yechimga intiladi, ya'ni u $Az = u$ tenglama uchun regulyarlashtiruvchi hisoblanadi.

Isbot. $\Omega[z] = \|z\|^2$ - inkorsiz funksional boʻlganligi sababli, u holda uning aniq $\Omega_0 = \inf_{z \in \tilde{Q}_\delta} \Omega[z]$ quyi chegarasi va shunday $\tilde{z}_n \in \tilde{Q}_\delta$ vektorlarning $\{\tilde{z}_n\}$ ketma-ketligi mavjudki, unda $n \to \infty$ da $\Omega[\tilde{z}_n] = \|\tilde{z}_n\|^2 \to \Omega_0$ boʻladi. Umumiylikni cheklamagan holda hisoblash mumkinki, har qanday $n > 1$ uchun quyidagicha boʻladi:

$$\|\tilde{z}_n\|^2 \le \|\tilde{z}_{n-1}\|^2 \le \ldots \le \|\tilde{z}_1\|^2, \ \tilde{z}_1 \ne 0.$$

Shu tarzda, $\{\tilde{z}_n\}$ ketma-ketlik $\|z\|^2 \le \|z_1\|^2$ boʻladigan barcha z elementlar (ya'ni vektorlar) uchun $r = \|z_1\|$ radiusli yopiq $\bar{D}_r$ soha shariga va $\tilde{Q}_\delta$ toʻplamga tegishli. Boltsano-Veyershtrass teoremasi boʻyicha, undan $\{\tilde{z}_{n_k}\}$ ketma-ketlikga oʻxshashlarini belgilash mumkin.

$$\lim_{n_k \to \infty} \tilde{z}_{n_k} = z_\delta$$

boʻlsin. $\{\tilde{z}_n\}$ ketma-ketlikka tegishli boʻlgan

$$F_{r,\delta} \equiv \{z; \|z\|^2 \le r^2 = \|z_1\|^2, \ z \in \tilde{Q}_\delta\}$$

toʻplamning yopiqligining kuchi bilan z_δ vektor $F_{r,\delta}$ toʻplamga, soʻngra, va $\tilde{Q}_\delta$, $z_\delta \in \tilde{Q}_\delta$ toʻplamga tegishli boʻladi.

$$\Omega_0 = \lim_{n_k \to \infty} \|\tilde{z}_{n_k}\|^2 = \|z_\delta\|^2$$

boʻlganligi sababli xususiyat 1) isbotlandi.

Xususiyat 2) ni isbotlaymiz. z_δ vektor $\|z\|^2$ funksionalni $\tilde{Q}_\delta$ toʻplamda minimallashtirishi sababli $\|z_\delta\|^2 \le \|z^0\|^2$ boʻladi. Shu tarzda, z_δ vektor cheklangan yopiq $F_\delta^0 \equiv \{z; \|z\|^2 \le \|z^0\|^2, z \in \tilde{Q}_\delta\}$ toʻplamga tegishli. Demak, har qanday $\delta > 0$ uchun.

Shunday $\{\tilde{u}_k\}$ vektorlar ketma-ketligi berilgan boʻlsinki, $k \to \infty$ da $\|\tilde{u}_k - \bar{u}\| = \delta_k$ va $\delta_k \to 0$ boʻladi. Har bir δ_k uchun $\tilde{Q}_{\delta_k}$ toʻplam aniqlangan. Isbotlangan xususiyat 1) boʻyicha har bir $\tilde{Q}_{\delta_k}$ toʻplamda $z_{\delta_k} \in F_0 \equiv \{z; \|z\|^2 \le \|z^0\|^2\}$ vektor mavjudki, u $\tilde{Q}_{\delta_k}$ toʻplamda $\Omega[z] = \|z\|^2$

funksionalni minimallashtiradi. Shu tarzda, $\{\tilde{u}_k\}$ vektorlar ketma-ketligi $k \to \infty$ da μ ga birlashadigan $\tilde{\mu}_k = \inf_{z \in R^n} \|Az - \tilde{u}_k\|$ sonlar ketma-ketligi va yopiq cheklangan $F_0 \equiv \{z; \|z\|^2 \le \|z^0\|^2\}$ to'plamga tegishli $\{z_{\delta_k}\}$ vektorlar ketma-ketligiga javob beradi.
Boltsano-Veyershtrass teoremasi bo'yicha $\{z_{\delta_k}\}$ ketma-ketlikdan birlashadigan ichki $\{z_{\delta_{k_s}}\}$ ketma-ketlikni belgilash mumkin.

$$\lim_{k_s \to \infty} z_{\delta_{k_s}} = \tilde{z}$$

bo'lsin. $z_{\delta_k} \in \tilde{Q}_{\delta_k}$ bo'lganligi sababli, har qanday $z_{\delta_{k_s}}$ vektor uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\|Az_{\delta_{k_s}} - \tilde{u}_{k_s}\| \le \tilde{\mu}_{k_s} + 2\delta_{k_s}.$$

Ushbu tengsizlikda $k_s \to \infty$ da chegaraga o'tish orqali va $|\tilde{\mu}_{k_s} - \mu| \le \delta_{k_s}$ tengsizlikni hisobga olgan holda $\|A\tilde{z} - \bar{u}\| \le \mu$ ga ega bo'lamiz. Har qanday z uchun $\|Az - \bar{u}\| \ge \mu$ bo'lganligi sababli, $\|A\tilde{z} - \bar{u}\| \ge \mu$ bo'ladi. So'ngra, $\|A\tilde{z} - \bar{u}\| = \mu$ bo'ladi. z_{δ_k} vektorlar normaning minimallik xususiyatiga ega bo'lganligi sababli, $\tilde{z}$ vektor ham xuddi shu xususiyatlarga ega bo'ladi. Shuning kuchi bilan $\|A\tilde{z} - \bar{u}\| = \mu$ tengsizlikdan va normal yechimning yagonaligidan $\tilde{z} = z^0$ kelib chiqadi.
Shu tarzda, ichki $\{z_{\delta_{k_s}}\}$ ketma-ketlik $Az = \bar{u}$ tenglamaning normal yechimiga birlashadi. Demak har qanday $\{z_{\delta_k}\}$ ketma-ketlik uchun ichki ketma-ketliklar birlashadi. Bundan kelib chiqadiki, $\{z_{\delta_k}\}$ ketma-ketlik $Az = \bar{u}$ tenglamaning z^0 normal yechimiga birlashadi. Xususiyat 2), shu bilan birga teorema 1 ham isbotlandi.

3. z_δ - $\Omega[z] = \|z\|^2$ funksional $\tilde{Q}_\delta$ to'plamda minimumga erishadigan vektor bo'lsin. Yaqqol geometrik farazlardan oson ko'rish mumkinki, z_δ vektor $\tilde{Q}_\delta$ to'plamning chegarasida yotadi, ya'ni $\|Az_\delta - \tilde{u}\| = \tilde{\mu} + 2\delta = \delta_1$ (bu $\Omega[z] = \|z\|^2$ funksionalning stabillashtiruvchi va kvazimonotonli bo'lishidan kelib chiqadi).
z_δ vektorni topish masalasini quyidagicha qo'yish mumkin: $\|Az - \tilde{u}\| = \mu + 2\delta$ shartni qanoatlantiruvchi z vektorlar orasida minimal normali z_δ vektorni ya'ni minimallashtiruvchi $\Omega[z] = \|z\|^2$ funksionalni topish.

Oxirgi masalani Lagranj usulida yechish mumkin, ya'ni z_δ sifatida qovushqoqmaslik bo'yicha aniqlangan ya'ni $\left\| Az^\alpha - \tilde{u} \right\| = \delta_1$ shartdan α parametrli

$$M^\alpha[z,\tilde{u}] = \left\| Az - \tilde{u} \right\|^2 + \alpha \left\| z \right\|^2, \ \alpha > 0,$$

funksionalni minimallashtiruvchi z^α vektorni olish mumkin. Shu bilan birga α parametr bir xil aniqlanadi.

4. $M^\alpha[z,\tilde{u}]$ - kvadratik funksional bo'lganligi sababli, ixtiyoriy $\tilde{u} \in R^m$ va $\alpha > 0$ lar uchun uning faqatgina bitta minimallashtiruvchi z^α vektori mavjud. Aslida, uni minimallashtiruvchi ikki z^α va $\hat{z}^\alpha$ vektorlar mavjud bo'lsin. To'g'ri (R^n fazo)da joylashgan, z^α va $\hat{z}^\alpha$ larni bog'lovchi z vektorlarni qarab chiqamiz:

$$z = z^\alpha + \beta(\hat{z}^\alpha - z^\alpha).$$

$M^\alpha[z,\tilde{u}]$ funksional ushbu to'g'ridagi elementlarda β dan manfiymas kvadratik funksiya bo'ladi. So'ngra, u ikki turli xil $\beta : \beta = 0$ ($z = z^\alpha$) va $\beta = 1$ ($z = \hat{z}^\alpha$) qiymatlarda eng kichik qiymatlarga erisha olmaydi.

z^α vektorning z_j^α komponentlari $M^\alpha[z^\alpha,\tilde{u}]$ funksionalning minimumlik sharti:

$$\frac{\partial M^\alpha}{\partial z_j^\alpha} = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n,$$

dan kelib chiquvchi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi hisoblanadi:

$$\alpha z_k^\alpha + \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{kj} z_j^\alpha = b_k, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Bu yerda

$$\bar{a}_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} a_{ij}, \quad b_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \tilde{u}_i.$$

z_j^α komponentalar qandaydir boshqa $M^\alpha[z,\tilde{u}]$ funksionalni minimallashtirish algoritmi yordamida aniqlanishi mumkin.

z^α vektorni α parametrga bog'liq bo'lgan ba'zi bir $z^\alpha = R(\tilde{u},\alpha)$ operatorning $\tilde{u}$ siga qo'llash natijasi sifatida qarab chiqish mumkin. Qaralayotgan holatda regulyarlashtirish usulining qo'llanish sharti bajarilganligi uchun $R(\tilde{u},\alpha)$ operator regulyarlashtiruvchi hisoblanadi, shuning uchun $z^\alpha = R(\tilde{u},\alpha)$ vektorni (2) sistemaning taqribiy normal yechimi sifatida qabul qilish mumkin.

$R_0(\tilde{u},\alpha)$ operator (2) sistema uchun regulyarlashtiruvchi, ya'ni 2-aniqlanishning 1) va 2) xususiyatlariga ega ekanligini ko'rsatamiz. Biz uning har qanday $\tilde{u}\in R^m$ uchun aniqlangan va $\alpha>0$, so'ngra 1) xususiyatga ega ekanligini o'rnatdik. Endi 2) xususiyatning o'rinli ekanligini ko'rsatamiz, ya'ni shunday $\alpha=\alpha(\delta)$ funksiyalar mavjudki, $z^{\alpha(\delta)}=R_0(\tilde{u},\alpha(\delta))$ vektorlar $\delta\to 0$ da (2) sistemaning z^0 normal yechimga birlashadi. Bu quyida keltiriladigan teorema 2 dan bevosita kelib chiqadi.

Teorema 2. z^0 $Az=\bar{u}$ sistemaning normal yechimi bo'lsin va $\bar{u}$ vektorning o'rniga biz shunday $\tilde{u}$ vektorga ega bo'lamizki, unda $\|\tilde{u}-\bar{u}\|\le\delta$ bo'ladi. Bundan buyon $\beta_1(\delta)$ va $\beta_2(\delta)$ - $[0,\delta_2]$ da qandaydir uzluksiz va $(0,\delta_2]$ da musbat funksiyalar, $\delta\to 0$ da nolga monoton intiluvchi shunday

$$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)}\le\beta_2(\delta),\quad \beta_2(0)=0$$

bo'lsin. Shunda $[0,\delta_2]$ da ixtiyoriy musbat $\alpha=\alpha(\delta)$ funksiyalar, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi:

$$\frac{\delta}{\beta_1(\delta)}\le\alpha(\delta)\le\beta_2(\delta),$$

$z^{\alpha(\delta)}=R_0(\tilde{u},\alpha(\delta))$ vektorlar $\delta\to 0$ da $Az=\bar{u}$ sistemaning z^0 normal yechimiga birlashadi, ya'ni

$$\lim_{\delta\to 0}\left\|z^{\alpha(\delta)}-z^0\right\|=0.$$

<u>Isbot.</u> $Az=\bar{u}$ va $Az=\tilde{u}$ sistemalar klassik yechimga ega bo'lmasligi mumkin. Shuning uchun

$$\inf_{z\in R^n}\|Az-\bar{u}\|=\mu\ge 0,\quad \inf_{z\in R^n}\|Az-\tilde{u}\|=\tilde{\mu}\ge 0.$$

z^α vektorda quyidagi funksional R^n da o'zining aniq quyi chegarasiga erishadigan bo'lsin:

$$M^\alpha[z,\tilde{u}]=\|Az-\tilde{u}\|^2+\alpha\|z\|^2.$$

Shunda, ravshanki, $Ax=\bar{u}$ tenglamaning normal yechimini aniqlash bo'yicha $\|\tilde{u}-\bar{u}\|\le\delta$ va $\left\|Az^0-\bar{u}\right\|=\mu$ bo'lganligi sababli quyidagi tengsizliklar bajariladi:

$$\tilde{\mu}^2+\alpha\left\|z^\alpha\right\|^2\le M^\alpha[z^\alpha,\tilde{u}]\le M^\alpha[z^0,\tilde{u}]=$$

$$=\left\|Az^0-\tilde{u}\right\|^2+\alpha\left\|z^0\right\|^2\le(\left\|Az^0-\bar{u}\right\|+\|\tilde{u}-\bar{u}\|)^2+\alpha\left\|z^0\right\|^2\le$$

$$\le\left(\left\|Az^0-\bar{u}\right\|+\delta\right)^2+\alpha\left\|z^0\right\|^2=(\mu+\delta)^2+\alpha\left\|z^0\right\|^2.$$

Shu tarzda, har qanday $\alpha > 0$ va $\|\tilde{u} - \bar{u}\| \le \delta$ bo‘ladigan ixtiyoriy shunday $u \in R^m$ uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\tilde{\mu}^2 + \alpha\|z^\alpha\|^2 \le (\mu + \delta)^2 + \alpha\|z^0\|^2 .$$

$\mu \le \tilde{\mu} + \delta$ ekanligini hisobga olgan holda, bu yerdan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\|z^\alpha\| \le 4\frac{\delta}{\alpha}(\tilde{\mu} + \delta) + \|z^0\|^2 .$$

α qiymatlar uchun

$$\delta/\alpha \le \beta_1(\delta), \quad \|z^\alpha\|^2 \le \beta_1(\delta)4(\tilde{\mu} + \delta) + \|z^0\|^2 \le \beta_1(\delta)4(\mu + 2\delta) + \|z^0\|^2 ,$$

yoki

$$\|z^\alpha\|^2 \le \varphi(\delta) + \|z^0\|^2 \le \varphi(\delta_2) + \|z^0\|^2 \tag{4}$$

tengsizliklar qanoatlantiriladi, bu yerda $\delta \to 0$ da $\varphi(\delta) = 4(\mu + 2\delta)\beta_1(\delta) \to 0$.

(4) tengsizlik barcha $\delta \in [0, \delta_2]$ uchun $\alpha(\delta) \ge \delta / \beta_1(\delta)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\alpha = \alpha(\delta)$ funksiya har qanday musbat $(0, \delta_2]$ oraliqda o‘rinli bo‘ladi. Keyingi muhokamalarda $\alpha = \alpha(\delta)$ shu turdagi fiksirlangan funksiya bo‘ladi.

$\{\tilde{u}_k\}$ - shunday $\delta_k = \|\tilde{u}_k - \bar{u}_k\|$ sonlar ketma-ketligi nolga birlashadigan, ya’ni $k \to \infty$ da $\delta_k \to 0$ bo‘ladigan vektorlar ketma-ketligi bo‘lsin. Ushbu ketma-ketlikka

$$D \equiv \{z; \|z\|^2 \le \varphi(\delta_2) + \|z^0\|^2\}$$

yopiq shar sohasiga tegishli z^{α_k}, $\alpha_k = \alpha(\delta_k)$ vektorlar ketma-ketligiga javob beradi. Undan birlashadigan ichki $\{z^{\alpha_{k_s}}\}$ ketma-ketlikni tanlash mumkin. $\lim_{k_s \to \infty} z^{\alpha_{k_s}} = \tilde{z}$ bo‘lsin. $\|Az^0 - \bar{u}\| = \mu$ bo‘lganligi sababli har qanday k_s uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned}
&0 \le \left\|Az^{\alpha_{k_s}} - \bar{u}\right\| - \mu \le \left\|Az^{\alpha_{k_s}} - \tilde{u}_{k_s}\right\| + \delta_{k_s} - \mu \le \\
&\le \sqrt{M^{\alpha_{k_s}}\left[z^{\alpha_{k_s}}, \tilde{u}_{k_s}\right]} - \mu + \delta_{k_s} \le \sqrt{M^{\alpha_{k_s}}\left[z^0, \tilde{u}_{k_s}\right]} - \mu + \delta_{k_s} = \\
&= \sqrt{\left\|Az^0 - \tilde{u}_{k_s}\right\|^2 + \alpha_{k_s}\|z^0\|^2} - \mu + \delta_{k_s} \le \sqrt{(\left\|Az^0 - \bar{u}\right\| + \delta_{k_s})^2 + \alpha_{k_s}\|z^0\|^2} - \mu + \delta_{k_s} = \\
&= \sqrt{(\mu + \delta_{k_s})^2 + \alpha_{k_s}\|z^0\|^2} - \mu + \delta_{k_s}.
\end{aligned}$$

$\alpha_{k_s} = \alpha(\delta_{k_s}) \le \beta_2(\delta_{k_s})$ shartdan foydalangan holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$0 \le \left\| Az^{\alpha_{k_s}} - \bar{u} \right\| - \mu \le \sqrt{(\mu + \delta_{k_s})^2 + \beta_2(\delta_{k_s}) \left\| z^0 \right\|^2} - \mu + \delta_{k_s} = \gamma(\delta_{k_s}),$$

bu yerda $\delta \to 0$ da $\gamma(\delta) \to 0$.

Shu tarzda har qanday k_s indeks uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$0 \le \left\| Az^{\alpha_{k_s}} - \bar{u} \right\| - \mu \le \gamma(\delta_{k_s}).$$

$k_s \to \infty$ da chegaraga o‘tish orqali $\left\| A\tilde{z} - \bar{u} \right\| = \mu$ ga ega bo‘lamiz. Bu shuni anglatadiki, $\tilde{z}$ (2) tenglamaning psevdoyechimi hisoblanadi. U normaning minimallik xususiyatiga ega. (2) tenglamaning z^0 normal yechimi yagona bo‘lganligi sababli, $\tilde{z} = z^0$ bo‘ladi.

Demak har qanday birlashadigan ichki ketma-ketlik uchun $\{z^{\alpha_k}\}$ ketma-ketlik bo‘ladi. So‘ngra, $\{z^{\alpha_k}\}$ ketma-ketlik $Az = \bar{u}$ sistemaning z^0 normal yechimiga birlashadi, shu bilan birga $z^{\alpha(\delta)}$ $\delta \to 0$ da z^0 ga birlashadi. Teorema isbotlandi.

Xulosa. Barcha $z \in R^n$ vektorlar shaklining to‘plamidan tashkil topgan R^m fazoning chiziqli ichki fazosini U_A orqali belgilaymiz, ya’ni

$$U_A \equiv \{u;\, u = Az,\, z \in R^n\}.$$

$Az = u$ - chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bo‘lsin, $z \in R^n$. Agar bu sistema mos kelmasa, ya’ni klassik yechimga ega bo‘lmasa, u vektorni U_A ga υ_A proyeksiya orqali belgilaymiz. Ma’lum bo‘lganidek, $\upsilon = u - \upsilon_A$ vektor U_A ichki fazoda ortogonal, shu sababli har qanday $z \in R^n$ uchun

$$\left\| Az - u \right\|^2 = \left\| Az - \upsilon_A \right\|^2 + \left\| u - \upsilon_A \right\|^2.$$

Bundan $\inf_{z \in R^n} \left\| Az - \upsilon_A \right\| = 0$ bo‘lganligi sababli quyidagi kelib chiqadi:

$$\mu = \inf_{z \in R^n} \left\| Az - u \right\| = \left\| u - \upsilon_A \right\|.$$

References:

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. “Методы решения некорректных задач” М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
2. Воскобойников Ю.Е., Мицель А.А. “НЕКОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ”, Учебное пособие, Томск, 2018.
3. Normurodov Ch.B., Turaev D.Sh., Jabborov I.Y., Buriyev J.N., Jonqobilov M.B. “Definition of different schemes for calculation of general solutions” // CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2021, p. 61-70.
4. To‘rayev D. Sh. Umumlashgan yechimlarni hisoblash uchun ayirmali sxemalar tushunchasi // Tadqiqot.uz – 2021 –№. 1. 9-15 bet.

5. Begaliyevich, N. C., Obidjonovich, N. Z., & Bahodir og'li, A. O. (2022). SOLVING MULTIDIMENSIONAL PROBLEMS WITH A WEAK APPROXIMATION METHOD. Galaxy International Interdisciplinary Research Journal, 10(5), 949-955.
6. Muhamediyeva, D., Egamberdiyev, N., & Xushboqov, I. (2021). FORMULATION OF THE PROBLEM PARTICLE SWARM METHOD FOR SOLVING THE GLOBAL OPTIMIZATION. InterConf
7. Shamsiddinovich, M. R., & Obidjonovich, Z. N. (2021). Advantages and Improvements of E-Textbook Teaching of Computer Science in General Secondary Educatin. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(12), 71-74
8. Якубов, С. Х., Хамраев, А. А., Хушбоков, И. У., & Нурматов, З. О. (2022). АЛГОРИТМИЗАЦИЯ САПР ОПТИМИЗАЦИИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ. Universum: технические науки, (11-1 (104)), 53-59.