



ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА СТЕФАНА ДЛЯ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВРЕМЕНИ

Жамуратов Кенгаш¹, Умаров Хабибулло², Сулаймонова Нигора³

¹ кандидат физико-математических наук, доцент, Гулистанский государственный университет, Узбекистан, г. Гулистан,

² старший преподаватель кафедры «Математике», Гулистанский государственный университет, Узбекистан, г. Гулистан,

³ магистрант, Гулистанский государственный университет, Узбекистан, г. Гулистан

<https://doi.org/10.5281/zenodo.5813774>

ИСТОРИЯ СТАТЬИ

Принято: 20 декабря 2021 г.
Утверждено: 25 декабря 2021 г.
Опубликовано: 30 декабря 2021 г.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Неизвестная граница, метод квазистационарного приближения, малое значение времени, функция Грина, уровень грунтовых вод, преобразование Лапласа-Карсона, уравнение теплопроводности.

АННОТАЦИЯ

Повышение горизонта воды в гидротехнических сооружениях вызывает подъем (подпор) поверхности грунтового потока на прилегающих к ним территориях и в ряде случаев создает угрозу подтопления городов, населенных пунктов, также засоления и заболачивания, ценных для сельского хозяйства земель. Вместе с тем устройство водохранилищ и водоемов приводит к рациональному перераспределению для получения электроэнергии, орошения и обводнения земель, водоснабжения, улучшает климатические условия и т.п.

Введение

В гидравлической теории фильтрации значение УГВ удовлетворяет уравнению Буссинеска

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(h(x,t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right) - \frac{\varepsilon^-}{\mu} \quad (1)$$

где μ – коэффициент водоотдачи (эффективная пористость), k – коэффициент фильтрации; ε^- – интенсивность испарения, определяемая равенством

$$\varepsilon^- = \begin{cases} 0, & h \leq h_{kp}, \\ f(h - h_{kp}, t), & h > h_{kp}, \end{cases} \quad (2)$$

Для упрощения исследования задачи уравнение (1) рассматривают обычно в линеаризованном виде. В работе осуществлена раздельная линеаризация уравнения (1) для каждой из областей $0 < x < l(t)$ ($h > h_{kp}$), $l(t) < x < \infty$ ($h < h_{kp}$) полагая



$$h(x,t) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \begin{cases} \bar{h}_1 \cdot \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}, & h > h_{kp} \\ \bar{h}_2 \cdot \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}, & h < h_{kp} \end{cases} \quad \varepsilon^- = f(u - \psi_0, t), u > \psi_0; \quad \varepsilon^- = 0, u < \psi_0$$

$$; \quad (8)$$

$$\Omega_{t_0}^\infty = \{(x,t): 0 < x < \infty, t_0 < t < T\}.$$

где $\bar{h}_1 \in (h_{kp}, h_m]$ и $\bar{h}_2 \in (h_1, h_{kp}]$ некоторые средние значения $h(x,t)$.

С учетом сделанных выше предпосылок задача о динамике грунтовых вод вблизи новых каналов и водохранилищ при наличии испарения формулируется в следующем виде: найти функции $u(x,t) = h(x,t) - h_l$ и $l(t)$, $l(t_0) = 0$ удовлетворяющие в области $\Omega_{t_0}^\infty \setminus \{x = l(t)\}$ уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\varepsilon^-}{\mu} \quad (3)$$

и условиям

$$u(x,t)|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad u(x,t)|_{x=0} = \psi(t),$$

$$u(x,t)|_{x \rightarrow +\infty} = 0 \quad (4)$$

$$u(x,t)|_{x=l(t)-0} = u(x,t)|_{x=l(t)+0} = \psi_0 = h_{kp} - h_l, \quad (t > t_0) \quad (5)$$

$$\bar{h}_1 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l(t)-0} = \bar{h}_2 \cdot \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=l(t)+0}, \quad (t > t_0). \quad (6)$$

Здесь

$$a^2(x) = \begin{cases} a_1^2 = \frac{k}{\mu} \bar{h}_1 = const, & 0 < x < l(t), \\ a_1^2 = \frac{k}{\mu} \bar{h}_2 = const, & l(t) < x < \infty, \end{cases} \quad (7)$$

Задача (3)–(6) относится к классу задач с неизвестной границей раздела.

Отличие задачи (3)–(6) от известной задачи Стефана [1 с. 372] в том, что на неизвестной границе раздела расход (поток) непрерывен, в то время, как в задачах Стефана расход разрывается и этот разрыв пропорционален скорости продвижения подвижной границы раздела (фронта).

Требование $l(t_0) = 0$ и указанное отличие от условия Стефана создают дополнительные трудности при исследовании задачи (3)–(6). В этой связи она представляет также самостоятельный математический интерес.

В этой связи она представляет также самостоятельный математический интерес.

Данная работа посвящена приближенному решению задачи (3)–(6) для значений времени t , близких к t_0 .

Пусть функции φ, ψ, f и их соответствующие производные обладают свойствами: $f_{zz}''(z,t), \varphi''(x), \psi''(t)$ суть непрерывные функции в своей области определения и кроме того $\varphi(x) > 0, \psi(t) > 0, \psi'(t) > 0, \varphi''(x) > 0, \varphi'(x) < 0, \psi(t_0) = \varphi(0) = \psi_0 = const.$

$$(9)$$



Функция $\varphi(x)$, определяющая положение УГВ в момент t_0 находится как решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой $x > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t \leq t_0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = \psi(t), \quad u|_{x \rightarrow +\infty} = 0$$

и имеет вид

$$u(x, t_0) = \varphi(x) = \frac{x}{2a_2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} \frac{\psi(\tau) \exp\{-x^2/4a_2^2(t-\tau)\}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau$$

Момент t_0 находится из условия $\psi(t_0) = \psi_0 = h_{kp} - h_l$. Заметим, что в последующих рассуждениях $\varphi(x)$ любая функция, удовлетворяющая условиям.

Объект и методы исследования

Применим видоизмененный метод квазистационарного приближения Лейбензона. Сущность метода заключается в том, что подвижная граница «замораживается», т.е. полагается $l(t) = l(s) = const$ и решается обычная задача сопряжения с вертикальной границей раздела $x = l(s)$. Затем, подставляя вместе $l(s)$ функцию $l(t)$ и пользуясь условием на границе $x = l(t)$, получают уравнение для определения $l(t)$.

$$g(x, t, \xi, \tau; l(s)) = \begin{cases} g_1(x, t, \xi, \tau; l(s)), & 0 < x, \xi < l(s), \\ g_2(x, t, \xi, \tau; l(s)), & 0 < \xi < l(s) < x < \infty, \\ g_3(x, t, \xi, \tau; l(s)), & 0 < x < l(s) < \xi < \infty, \\ g_4(x, t, \xi, \tau; l(s)), & l(s) < x < \infty; \end{cases}$$

Итак, полагая, $l(t) = l(s) \neq 0$ рассмотрим следующую двухслойную задачу на полупрямой $x > 0$, решение которой зависит от $l(s)$:

$$\frac{\partial U^{(s)}}{\partial t} = a^2(x) \frac{\partial^2 U^{(s)}}{\partial t^2} - \frac{\varepsilon}{\mu},$$

$$(x, t) \in \Omega_{t_0}^\infty \setminus \{x : x = l(s)\} \quad (11)$$

$$U^{(s)}|_{x=0} = \psi(x); \quad U^{(s)}|_{t=t_0} = \varphi(x); \quad U^{(s)}|_{x \rightarrow +\infty} = 0,$$

$$(12)$$

$$[U^{(s)}]_{x=l(s)} = 0; \quad \tilde{h}_1 \frac{\partial U^{(s)}}{\partial x} \Big|_{x=l(s)-0} = \tilde{h} \frac{\partial U^{(s)}}{\partial x} \Big|_{x=l(s)+0}$$

$$, \quad (13)$$

где ε и $a(x)$ определяется (7), (8) с учетом $l(t) = l(s) \neq 0$; φ, ψ и f – обладает приведенными выше свойствами (9), символ означает, что

$$[f(x)]_{x=a} = f|_{x+a} - f|_{x-a}.$$

В работе [1, с 126] с помощью интегрального преобразования Лапласа – Карсона построена функция Грина двухслойной первой краевой задачи на полупрямой $x > 0$ для уравнения теплопроводности с кусочно-постоянным коэффициентом в случае $l(s) = 1$. В случае $l(s) \neq 1, l(s) > 0$ она имеет вид



где

$$g_1(x, t, \xi, \tau; l(s)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2a_1 \sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-\xi+2nl(s))^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x-\xi+2n(s))^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\} - \delta \exp\left\{-\frac{(2(n+1)l(s)-|x-\xi|)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\} - \delta \exp\left\{-\frac{(2(n+1)l(s)-|x-\xi|)^2}{4a_1^2(t-\tau)}\right\} \right]$$

Аналогично определяются и $g_2, g_3, g_4,$

$$\delta = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}, \lambda = \sqrt{\frac{\tilde{h}_1}{\tilde{h}_2}}; 0 < \lambda < 1.$$

Отметим, что из-за громоздкости выражения для $g_1(x, t, \xi, \tau; l(s))$

Пользуясь интегральным представлением [1, с 163] решение задачи (11)-(13), нетрудно получить следующее интегральное уравнение

$$U^{(s)}(x, t) = A^{(s)}U^{(s)} + B(x, t; l(s)).$$

Здесь

$$A^{(s)}U^{(s)} = \frac{1}{\mu} \int_{t_0}^t d\tau \int_0^{l(s)} g(x, t, \xi, \tau; l(s)) f(U^{(s)} - \psi_0, \tau) d\xi$$

$$B(x, t; l(s)) = \int_0^{+\infty} g(x, t, \xi, t_0; l(s)) \varphi(\xi) d\xi + a_1^2 \int_{t_0}^t \frac{\partial g(x, t, \xi, \tau; l(s))}{\partial \xi} \left(\frac{U}{l}, \frac{p_1(U, l)}{p_2(\psi, \tau)} \right) d\tau \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

Принимаем за приближенное решение задачи (3)-(6) функции $l(t)$ и $U(x, t)$ определяемые как решением системы функциональных уравнений

$$\left. \begin{aligned} U(x, t) &= AU + B(x, t; l(t)), \\ \psi_0 &= [AU + B(x, t; l(t))]_{x=l(t)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь

$$AU + B(x, t; l(t)) \approx [A^{(s)}U^{(s)} + B(x, t; l(s))]_{l(s)=l(t)}$$

Результаты численного решения задач типа Стефана незначительно отличаются от точного решения, полученного в квазистационарном приближении Лейбензона для достаточно малых значений времени [1, с 455]. Однако вопрос об оценке погрешности метода остается открытым.

Систему (14) запишем в виде матричного операторного уравнения:

где

$$\begin{aligned} p_1(U, l) &= U - AU + B(x, t; l(t)) \\ p_2(U, l) &= \psi_0 - [AU + B(x, t; l(t))]_{x=l(t)}. \end{aligned}$$

Считаем, что областями действия и значений оператора $p \begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix}$ являются



соответственно пространства C^* и C ,

где

$$C^* = C_1 \times C_2;$$

$$C_1 = \{U(x, t): U \in C[0, l] \times [t_0, T]\},$$

$$C_2 = \left\{ l(t): l(t) = m(t)(t - t_0)^{\frac{1}{2} + \alpha}, l(t) \in C[t_0, T], \frac{1}{2} \leq \alpha < 1 \right\}$$

$$; b = \max_{t_0 < t \leq T} l(t) = l(T).$$

Под знаком \times понимается прямое произведение. Определим нормы в пространствах C^* , C_1 и C_2 :

$$\|U\|_{C_1} = \max_{x, t} |U(x, t)|;$$

$$\|l(t)\|_{C_2} = \max_t \left| (t - t_0)^{-\frac{1}{2}} l(t) \right|;$$

$$\left\| \begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix} \right\|_{C^*} = \|U\|_{C_1} + \|l\|_{C_2};$$

$$\left\| P \begin{pmatrix} U \\ l \end{pmatrix} \right\|_C = \|p_1(U, l)\|_C + \|p_2(U, l)\|_C.$$

Применим к уравнению (15) метод Ньютона-Канторовича [3, с 283].

В начал рассмотрим случай $0 < x < l(t)$.

Положим

$$l_0(t) = 2a_1(t - t_0)^{\alpha + \frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \leq \alpha < 1,$$

$$u_0(x, t) = B(x, t; l_0(t)).$$

Тогда первое приближение процесса Ньютона находится решением следующего матричного уравнения относительно поправок

$$\Delta u(x, t) = u_1(x, t) - u_0(x, t) \quad \text{и}$$

$$\Delta l = l_1(t) - l_0(t):$$

$$\begin{pmatrix} P'_{1u}(u_0, l_0) \cdot \Delta u + P'_{1l}(u_0, l_0) \cdot \Delta l \\ P'_{2u}(u_0, l_0) \cdot \Delta u + P'_{2l}(u_0, l_0) \cdot \Delta l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_1(u_0, l_0) \\ -P_2(u_0, l_0) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Здесь $P'_{iu}(u_0, l_0)$, $P'_{il}(u_0, l_0)$ ($i = 1, 2$) - производные Фреше.

Приступим к получению оценок для норм

$$\left\| P \begin{pmatrix} u_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \left(P \begin{pmatrix} u_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\| \text{ и } \left\| P'' \begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} \right\|,$$

которые участвует в неравенстве, обеспечивающем сходимость процесс Ньютона.

По определению нормы

$$\left\| P \begin{pmatrix} U_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\| = \max_{x, t} |P_1(u_0, l_0)| + \max_t |P_2(u_0, l_0)|$$

В силу предположений о гладкостях φ , ψ и f , после некоторых преобразований слагаемых левый части (16) получим

$$\left\| P \begin{pmatrix} u_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\| \leq \eta_1 \equiv M_p \cdot (t - t_0)^\alpha,$$

$$\frac{1}{2} \leq \alpha < 1, \quad (17)$$

где M_p - положительная постоянная, зависящая от данных задачи.

Если мы покажем, что матричное уравнение (16) разрешимо, то этот факт будет эквивалентен существованию и ограниченности по норме обратного оператора



$$\left(P' \begin{pmatrix} u_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right)^{-1}.$$

Решение матричного уравнения (16) равносильно системе линейных интегральных уравнений второго рода. Согласно общей теории системы интегральных уравнений Вольтера второго рода она разрешима, т.е. имеет место неравенство

$$\left\| \left(P' \begin{pmatrix} u_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \right\| \leq \eta_0 \quad (17)$$

Можно показать, что вторая производная оператора $P \begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix}$ существует и ограничена по норме:

$$\left\| P'' \begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} \right\| \leq \eta_2 \quad (18)$$

Как следует из оценок (15), (16) и (17) существует такое $T_0 \in (t_0, T_1]$, что для всех $t \in (t_0, T_0]$ имеет место неравенство

$$h_0 = \eta_0^2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 < \frac{1}{2}.$$

Тогда согласно приведенной теореме [3] следует, что уравнение (15) имеет единственное решение $\begin{pmatrix} u^* \\ l^* \end{pmatrix}$ в шаре

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ l \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_0 \\ l_0 \end{pmatrix} \right\| \leq r < r_1, \quad r_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0,$$

где h_0 и η_0 - постоянные, связанные с данными задачи. Замечание. Решение задачи (3)-(6) в области $l(t) < x < \infty$ явно выписывается с помощью функции Грина для указанной области, если только известно решение указанной задачи в области $0 < x < l(t)$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Л.И. Рубинштейн. Проблема Стефана. Рига: Звайгзне, 1967, 458 с.
2. Л.И. Рубинштейн. Об единственности решения одной двухслойной задачи Стефанского типа. Докл. АН Р., 1965, Т.160, №5, с.1019-1022.
3. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.