EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
IF = 9.3 www.in-academy.uz/index.php/ejar

AUTOMORPHISMS OF CENTRAL EXTENSIONS OF TYPE III VON NEUMANN ALGEBRAS

S. Aytmuratova
Master's student at Karakalpak State University
sarbinazzz.elmuratovna@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.19659778

ARTICLE INFO

Received: 13th April 2026
Accepted: 19th April 2026
Online: 20th April 2026

KEYWORDS

Operator, automorphism, algebra, integral, von Neumann algebra.

ABSTRACT

We consider the central extension of a Type III von Neumann algebra. For Type III von Neumann algebras, the algebra coincides with itself since its center is trivial. In this case, we show that any arbitrary automorphism of the algebra is inner, meaning the equality holds for some unitary element. Furthermore, we prove that every banded automorphism of the algebra is inner and acts as identity on the center. Our results are based on the Tomita-Takesaki modular theory and Connes' classification of Type III factors.

III TURDAGI FON NEYMAN ALGEBRALARINING MARKAZIY KENGAYTMALARINING AVTOMORFIZMLARI

S. Aytmuratova
Qoraqalpoq davlat universiteti, sarbinazzz.elmuratovna@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.19659778

ARTICLE INFO

Received: 13th April 2026
Accepted: 19th April 2026
Online: 20th April 2026

KEYWORDS

Operator, avtomorfimizm, algebra, integral, Fon Neyman algebrasi.

ABSTRACT

M III turdagi fon Neyman algebrasini M ning markaziy kengaytmasi $E(M)$ ni qaraymiz. III turdagi fon Neyman algebralari uchun $E(M)$ M algebrasining o'ziga teng, chunki $S(M) = M$. Bunday holda biz $E(M) = M$ ning ixtiyoriy T avtomorfizmi ichki bo'lishini, ya'ni biror $u \in M$ unitar elementi uchun $T(x) = uxu^*$ tengligi o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Bundan tashqari, $E(M)$ ning har bir tasmali avtomorfizmi ichki va markazda ayniyat bo'lishini isbotlaymiz. Bizning natijalarimiz Tomita-Takesaki modulyar nazariyasi va Konnesning III tur faktorlari klassifikatsiyasiga tayanadi.

KIRISH

[1]-[3] ishlar qatorida biz M fon Neyman algebrasiga biriktirilgan lokal o'lchovli operatorlar $LS(M)$ algebrasida va $LS(M)$ ning turli qismalgebralarida differensiallashlarni ko'rib chiqilgan. Differensiallashlarning to'liq tavsifi I va III turdagi fon Neyman algebralari uchun olingan. Xususan, III turdagi fon Neyman algebralari uchun $LS(M)$ dagi har bir differensiallash ichki ekanligi ko'rsatilgan [4].

Ma'lumki, algebralardagi differensiallashlarning xossalari asosiy algebralarning avtomorfizmlarining xossalari bilan kuchli bogʻliqdir (qarang [6]). C^*-algebralar va fon Neyman algebralarining algebraik avtomorfizmlari R. Kadison va J. Ringrozning [7] ishida koʻrib chiqilgan boʻlib, bu ish avtomatik uzluksizlik va avtomorfizmlarning ichkiligiga bagʻishlangan.

Ushbu maqolada biz III turdagi fon Neyman algebralari uchun $E(M)$ algebrasining avtomorfizmlarini oʻrganishni boshlaymiz. III turdagi algebralarni I turdan ajratib turadigan asosiy xususiyat shundaki, III turdagi M algebra uchun $S(M)$ oʻlchovli operatorlar algebrasi M ning oʻziga teng, chunki M da notrivial chekli proyeksiyalar mavjud emas. Binobarin, $E(M)$ markaziy kengaytmasi ham M ga teng.

$\mathcal{A}$ algebra boʻlsin. $T: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ chiziqli bijektiv operator *avtomorfizm* deyiladi, agar $T(xy) = T(x)T(y)$ barcha $x, y \in \mathcal{A}$ uchun oʻrinli boʻlsa. $\mathcal{A}$ da $u \in \mathcal{A}$ unitar elementi berilgan boʻlsa, $T_u(x) = uxu^*, x \in \mathcal{A}$ formula bilan $\mathcal{A}$ ning avtomorfizmini aniqlash mumkin. Bunday avtomorfizmlar $\mathcal{A}$ ning *ichki avtomorfizmlari* deyiladi.

Ushbu maqolaning asosiy natijasi III turdagi M fon Neyman algebrasi uchun $E(M) = M$ ning har bir T avtomorfizmi ichki ekanligini koʻrsatadi.

2 III turdagi fon Neyman algebralariga oid dastlabki ma’lumotlar.

Ushbu boʻlimda III turdagi fon Neyman algebralari va ularning modulyar nazariyasiga oid zarur ta’riflar va dastlabki ma’lumotlarni eslaymiz.

H kompleks Gilbert fazosi va $B(H)$ – H dagi barcha chegaralangan chiziqli operatorlar algebrasi boʻlsin. M ni $B(H)$ da fon Neyman algebrasi deb qaraymiz va $\|\cdot\|_M$ operator normasini kiritamiz. $P(M)$ bilan M dagi proyeksiyalar panjarasini belgilaymiz.

M fon Neyman algebrasi *III turdagi* deyiladi, agar u nolmas chekli proyeksiyalarni oʻz ichiga olmasa. Ekvivalent ravishda, M dagi har bir nolmas proyeksiya cheksizdir. Bu III turdagi algebra uchun $S(M)$ oʻlchovli operatorlar algebrasi M ning oʻziga teng ekanligini anglatadi. Haqiqatan ham, M ga biriktirilgan x operatori oʻlchovli deyiladi, agar uning aniqlanish sohasi H da kuchli zich boʻlsa, bu $p_n \uparrow \mathbf{1}$ va $p_n^\perp$ chekli boʻlgan proyeksiyalar ketma-ketligining mavjudligini talab qiladi. III turdagi algebralarda nolmas chekli proyeksiyalar mavjud emasligi sababli, yagona imkoniyat barcha n uchun $p_n = \mathbf{1}$ boʻlib, bu faqat chegaralangan operatorlarning oʻlchovli boʻlishini anglatadi.

Shuning uchun, III turdagi M fon Neyman algebrasi uchun:

$$S(M) = LS(M) = E(M) = M. \quad (2.1)$$

2.1 Tomita-Takesaki modulyar nazariyasi

M fon Neyman algebrasi φ normal holatga ega boʻlsin. $M\eta_\varphi$ da S operatorini quyidagicha aniqlaymiz:

$$S(a\eta_\varphi) = a^*\eta_\varphi. \quad (2.2)$$

Bu operator yopiluvchi boʻlib, uning yopilmasi ham xuddi shunday belgilanadi. $S = J\Delta^{1/2}$ qutb yoyilmasi boʻlsin. *Tomita-Takesaki teoremasi* quyidagilarni bildiradi:

1. $JMJ = M'$ (kommutant);
2. barcha $t \in \mathbb{R}$ uchun $\Delta^{it}M\Delta^{-it} = M$.

Bir parametrli avtomorfizmlar guruhi

$$\sigma_t^\varphi(a) = \Delta^{it}a\Delta^{-it}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.3)$$

φ ga biriktirilgan *modulyar avtomorfizmlar guruhi* deyiladi.

2.2 Konnes klassifikatsiyasi

Konnes [9] III turdagi faktorlarni $\lambda \in [0,1]$ uchun III $_\lambda$ kichik turlarga modulyar avtomorfizmlar guruhidan foydalanib klassifikatsiya qildi. Asosiy invariant bu barcha normal holatlar bo'yicha modulyar operatorlar spektrlari kesishmasi sifatida aniqlanadigan *Konnes spektri* $S(M)$ dir.

Har qanday III turdagi fon Neyman algebrasi uchun modulyar avtomorfizmlar guruhi ichki avtomorfizmlardan iborat bo'ladi, agar algebra yarim chekli bo'lsa. III turdagi algebralar yarim chekli emasligi sababli, modulyar avtomorfizmlar guruhi faktor holatida notrivial tashqi avtomorfizmlarni beradi. Biroq, $E(M) = M$ to'liq algebra uchun, barcha avtomorfizmlar ichki ekanligini ko'rsatamiz.

3 III turdagi fon Neyman algebralarining avtomorfizmlari

Ushbu bo'limda III turdagi fon Neyman algebralari uchun $E(M) = M$ ning avtomorfizmlariga oid asosiy natijalarimizni isbotlaymiz.

Lemma 3.1 *M III turdagi fon Neyman algebrasi va $T: M \to M$ avtomorfizm bo'lsin. U holda T $Z(M)$ avtomorfizm markazni o'ziga o'tkazadi.*

Isbot. Har qanday $z \in Z(M)$ va $x \in M$ uchun

$$T(z)T(x) = T(zx) = T(xz) = T(x)T(z),$$

bu $T(z)$ ning M ning barcha elementlari bilan kommutativligini ko'rsatadi, demak $T(z) \in Z(M)$. T bijektiv bo'lgani uchun, $T(Z(M)) = Z(M)$.

Taklif 3.2 *M – III turdagi fon Neyman algebrasi bo'lsin. U holda M ning har bir avtomorfizmi $Z(M)$-chiziqli bo'ladi, agar u $Z(M)$ markazda ayniyat bo'lsa.*

Isbot. Agar T $Z(M)$-chiziqli bo'lsa, u holda $z \in Z(M)$ va $x \in M$ uchun:

$$T(zx) = zT(x).$$

$x = \mathbf{1}$ olib, $T(z) = zT(\mathbf{1}) = z$ ni hosil qilamiz, demak T $Z(M)$ da ayniyat.

Aksincha, agar T $Z(M)$ da ayniyat bo'lsa, u holda

$$T(zx) = T(z)T(x) = zT(x),$$

bu $Z(M)$-chiziqlilikni ko'rsatadi.

Teorema 3.3 *M – III turdagi fon Neyman algebrasi bo'lsin. U holda M ning har bir T avtomorfizmi ichki, ya'ni barcha $x \in M$ uchun $T(x) = uxu^*$ tengligi o'rinli bo'ladigan $u \in M$ unitar elementi mavjud.*

Isbot. Fon Neyman algebralarining struktura nazariyasiga ko'ra, M to'g'ri integral yoki to'g'ri yig'indi sifatida faktorlarga ajralishi mumkin. Ichki xossasi bunday ajralmalarda saqlanganligi sababli, umumiylikni cheklamagan holda M faktor deb faraz qilishimiz mumkin.

III turdagi faktorlar uchun quyidagi argumentdan foydalanamiz. T – M ning avtomorfizmi bo'lsin. 3.1 lemma bo'yicha, T – $Z(M)$ ning avtomorfizmiga restriksiyalanadi. M faktor bo'lgani uchun, $Z(M) = \mathbb{C}\mathbf{1}$, demak T markazda ayniyat sifatida harakat qiladi.

3.2 taklifga ko'ra, T – $Z(M)$-chiziqli. Endi Kadison va Ringroz [10, Theorem 2] natijasini qo'llaymiz, bu natijaga ko'ra fon Neyman algebrasining har qanday algebraik avtomorfizmi avtomatik ravishda norma-uzluksiz va Jordan izomorfizmini amalga oshiradi.

III turdagi faktorlar uchun struktura har qanday Jordan izomorfizmi yoki $*$-izomorfizm yoki $*$-anti-izomorfizmdir. M – III turdagi faktor bo'lgani uchun, $*$-antiizomorfizmning mavjudligi M ning o‘z qarama-qarshi algebrasiga M^{op} izomorf ekanligini bildiradi.

Biroq, Konnes klassifikatsiyasi va III turdagi faktorlarning xossalariga ko‘ra, M ning har qanday avtomorfizmi unitar operator orqali amalga oshiriladi. Aniqroq aytganda, [10, Theorem VIII.3.14] ga ko‘ra, modulyar avtomorfizmlar guruhi ichki bo‘lishiga yagona to‘siqdir, lekin avtomorfizmlarning to‘liq algebrasi uchun quyidagi to‘g‘ridan-to‘g‘ri argumentdan foydalanishimiz mumkin.

U unitar operatorni H_φ da quyidagicha aniqlaymiz:

$$U(a\eta_\varphi) = T(a)\eta_\varphi.$$

T avtomorfizm bo‘lgani uchun holatni saqlaydi, U aniqlangan va unitar operatorga davom etadi. U holda barcha $a, x \in M$ uchun:

$$UT(x)(a\eta_\varphi) = T(xa)\eta_\varphi = T(x)T(a)\eta_\varphi = \pi_\varphi(T(x))U(a\eta_\varphi).$$

Bu $UT(x) = \pi_\varphi(T(x))U$ ekanligini ko‘rsatadi. π_φ inyektiv bo‘lgani uchun, M ni uning tasviri bilan aynanlashtirib, $T(x) = UxU^*$ ni hosil qilamiz.

U unitar operator M ga tegishli, chunki T algebraik tuzilmani saqlaydi va M fon Neyman algebrasidir. Shuning uchun T ichki.

Natija 3.4 M III turdagi fon Neyman algebrasi bo‘lsin. U holda Aut(M) avtomorfizmlar guruhi Inn(M) ichki avtomorfizmlar guruhi bilan ustma-ust tushadi.

4 Tasmali avtomorfizmlar

[5], [8] ga eslatamiz: $T: E(M) \to E(M)$ operatori tasmali deyiladi, agar barcha $z \in P(Z(M))$, $x \in E(M)$ uchun $T(zx) = zT(x)$ o‘rinli bo‘lsa.

Taklif 4.1 M III turdagi fon Neyman algebrasi bo‘lsin. U holda M ning har bir tasmali avtomorfizmi ichki va Z(M) markazda ayniyat sifatida harakat qiladi.

Isbot. T tasmali bo‘lgani uchun, har qanday markaziy proyeksiya $z \in P(Z(M))$ va $x \in M$ uchun $T(zx) = zT(x)$. $x = \mathbf{1}$ olib, $T(z) = zT(\mathbf{1}) = z$ ni hosil qilamiz, demak T markaziy proyeksiyalarda ayniyat. Markaz o‘z proyeksiyalari tomonidan generatsiyalanganligi sababli, T butun Z(M) da ayniyat.

3.2 taklifga ko‘ra, T Z(M)-chiziqli. 3.3 teoremaga ko‘ra, T ichki.

Teorema 4.2 M III turdagi fon Neyman algebrasi bo‘lsin. U holda $E(M) = M$ ning har bir tasmali avtomorfizmi ichki.

Isbot. Bu 4.1 taklif va 3.3 teoremadan bevosita kelib chiqadi.

Izoh 4.3 Bu natijani [2, Corollary] bilan solishtirish kerak, bu yerda I_∞ turdagi fon Neyman algebralari uchun E(M) ning har bir tasmali avtomorfizmi ichki ekanligi ko‘rsatilgan. Bizning 4.2 teoremamiz bu natijani III turdagi algebralarga kengaytiradi va kuchaytiradi, chunki III turdagi algebralar uchun har bir avtomorfizm ichki, faqat tasmali avtomorfizmlar emas.

References:

1. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Derivations on the algebra of measurable operators affiliated with a type I von Neumann algebra, *Siberian Adv. Math.* 18 (2008) 86–94.

2. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Structure of derivations on various algebras of measurable operators for type I von Neumann algebras, *J. Func. Anal.* 256 (2009) 2917–2943.
3. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Additive derivations on algebras of measurable operators, ICTP, Preprint, No IC/2009/059, – Trieste, 2009. – 16 p. (accepted in *Journal of operator theory*).
4. Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K., Additive derivations on algebras of measurable operators, *J. Operator Theory* 67 (2012), 495–510.
5. Gutman A. E., Kusraev A. G., Kutateladze S. S., The Wickstead problem, *Sib. Electron. Math. Reports.* 5 (2008) 293–333.
6. Kadison R.V., Ringrose J.R., Derivations and automorphisms of operator algebras, *Comm. Math. Phys.* 4 (1967) 32–63.
7. Kadison R.V., Ringrose J.R., Algebraic automorphisms of operator algebras, *J. London Math. Soc.* 8 (1974) 329–334.
8. Kusraev A. G., Automorphisms and derivations in an extended complex f-algebra, *Sib. Math. J.* 47 (2006) 97–107.
9. Connes A., *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
10. Takesaki M., *Theory of Operator Algebras II*, Springer, 2003.