EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685
www.in-academy.uz

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

Чориева С.Т [1], Туропова С.Ж [2]
Термезский государтвенный университет, (Республика Узбекистан)
https://doi.org/10.5281/zenodo.6584517

ИСТОРИЯ СТАТЬИ
Принято: 10 май 2022 г.
Утверждено: 14 май 2022 г.
Опубликовано: 24 май 2022 г.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА
Сингулярный коэффициент, гиперболической уравнения, вырождающегося внутри областию

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется нелокальные краевые задачи типа задачи Бицадзе-Самарского.

Расмотрим уравнение

-$|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{m/2-1} u_x + (\beta_0/y) u_y = 0$ (1)

В уравнении (1) предполагается, что постоянные $m > 0$, α_0 и β_0 удовлетворяют условиями -$(m/2) \le \beta_0 \le 1$, $0 \le \alpha_0 < (m+2)/2$.

Корректность постановки краевых задач для (1) существенно зависит от е параметров α_0 и β_0 при младших членах уравнения (1) [1,2]

Пуст Ω конечная односвязная область плоскости независимых переменных *x, y* ограниченная характеристиками

$$\left.\begin{matrix} AC_1 \\ BC_1 \end{matrix}\right\}: x \mp \frac{2}{2+m} y^{\frac{2+m}{2}} = \mp 1, \qquad y > 0$$

$$\left.\begin{matrix} AC_2 \\ BC_2 \end{matrix}\right\}: x \mp \frac{2}{2+m} (-y)^{\frac{2+m}{2}} = \mp 1, \qquad y > 0$$

уравнения (1).

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta B_0 C_0$, т.е. β=0, 0$\le \alpha < 1$, где

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \frac{m + 2(\beta_0 \pm \alpha_0)}{2(m+2)}$$

Задача Г. Найти в области Ω регулярное решение

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y), (x,y) \in \Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}, \\ u_2(x,y), (x,y) \in \Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}, \end{cases}$$

уравнения (1) из класса $C(\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}) \cap C^2(\Omega \setminus AB)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u_j\left[\theta^{(j)}(x)\right] = \mu_1 u_j\left[\theta_{k_1}^{(j)}(x)\right] + \mu_2 u_j\left[\theta_{k_2}^{(j)}(x)\right] + \delta_j(x), \quad \forall x \in I = AB, \quad j = 1,2, \quad i = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

Здесь *j=1* соответствует области $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}$, *а* j =2- области $\Omega_2 = \Omega \cap \{y > 0\}$, и условиям сопряжения

$\lim_{y\to+0} u_1(x,y) = c \lim_{y\to-0} u_2(x,y), \forall x \in \bar{I},$
(3)

где $\theta^{(j)}(x)$- аффиксы точки перессечение характиристики BC_j с характеристикой исходящие из точки $M(x_0,0) \in I$, $\theta_{k_1}^{(j)}(x)$ – аффиксы точки пересечение кривой $x + [2k_j/(m+2)]|y|^{(m+2)/2} = 1$, лежащей внутри области Ω_j, с характеристикой, исходящие из точки $M(x_0,0) \in I$, *c=const*$\neq 0$; $\mu_i = const$; $\delta_j(x)$,$\rho(x)$, $\lambda(x)$ заданные функции из класса $C^2(\bar{I}) \cap C^3(I)$, причем $\rho(x) - c \neq 0$, $k_1 > k_2 > 1, \delta_j^{(n)}(1) = 0, n = 0,1,2.$

1. Расмотрим краевое условия (2) для области $\Omega_1(y > 0)$.

Решение уравнения (1) в области Ω_1 удовлетворяющее видоизмененным условиям Коши [3]:

$u_1(x,+0) = \tau_1(x),\ x \in \bar{I},\ \lim_{y\to+0} y^{\beta_0}\frac{\partial u_1}{\partial y} = \nu_1(x), x \in I;$ (5)

дается формулой:

$$u_1(x,y) = \tau_1\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right) - \frac{2^\alpha(-y)^{1-\beta_0}}{m+2}\int_{-1}^{1}\nu_1\left(x - \frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)(1-t)^{-\alpha}dt.$$

(6)

Отсюда легко вычислить, что

$u_1[\theta^{(1)}(x)] = \tau_1(x) - 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^1 \nu_1(z))(z-x)^{-\alpha}\,dz.$
(7)

$u_1\left[\theta_{k_1}^{(1)}(x)\right] = \tau_1(x) - 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^{a_1+b_1x} \nu_1(z))(z-x)^{-\alpha}\,dz.$
(8)

$u_1\left[\theta_{k_2}^{(1)}(x)\right] = \tau_1(x) - 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^{a_2+b_2x} \nu_1(z))(z-x)^{-\alpha}\,dz.$
(9)

где $a_i = \frac{2}{k_i+1}$, $b_i = \frac{k_i-1}{k_i+1} = 1 - a_i$, $i = 1,2.$

Теперь выражения (7)-(9)б подставляя в кравые условия (2) получим

$\tau_1(x) - 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^1 \nu_1(z)(z-x)^{-\alpha}\,dz = (\mu_1+\mu_2)\tau_1(x) - \mu_1 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^{a_1+b_1x} \nu_1(z)(z-x)^{-\alpha}\,dz - \mu_2 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^{a_2+b_2x} \nu_1(z)(z-x)^{-\alpha}dz$
(10)

Соотношение (10) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\nu_1(z)$ привнесенного на I из области Ω_1.

2. Рассмотрим краевое условие (2) для области $\Omega_2(y < 0)$.

В силу формулы (6), дающей решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$u_2(x,-0) = \tau_2(x), x \in \bar{I},$
$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u_2}{\partial y} = \nu_2(x),\ x \in I;$
(11)

легко убедиться, что

$\tau_2(x) - 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^1 \nu_2(z)(z-x)^{-\alpha}\,dz = (\mu_1+\mu_2)\tau_2(x) - \mu_1 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^{a_1+b_1x} \nu_2(z)(z-x)^{-\alpha}\,dz -$

$\mu_2 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^{a_2+b_2x} \nu_2(z)(z-x)^{-\alpha}dz + \delta_2(x)$. (12)

Соотношение (12) является вторым функционалным соотношением между неизвестными функциями $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$ привнесенного на I из области Ω_2.

Тепер выражение (10) согласно условиям сопряжения (3), (4),т.е.с учетом равенств: $\tau_1(x) = c\,\tau_2(x), \nu_1(x) = \rho(x)\nu_2(x) + \lambda(x)$ преобразуем к виду

$c\,\tau_2(x) - 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^1[\rho(z)\nu_2(z) + \lambda(z)](z-x)^{-\alpha}\,dz = (\mu_1+\mu_2)c\tau_2(x) - \mu_1 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^{a_1+b_1x}[\rho(z)\nu_2(z) + \lambda(z)](z-x)^{-\alpha}\,dz - \mu_2 2^{\alpha-1}(\frac{2}{m+2})^\alpha \int_x^{a_2+b_2x}[\rho(z)\nu_2(z) + \lambda(z)](z-x)^{-\alpha}dz + \delta_1(x)$. (13)

Из (12) и (13) исключая $\tau_2(x)$ получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\nu_2(x)$

$\int_x^1 \nu(z)(z-x)^{-\alpha}\,dz = \mu_1 \int_x^{a_1+b_1x} \nu(z)(z-x)^{-\alpha}\,dz - -\mu_2 \int_x^{a_2+b_2x} \nu(z)(z-x)^{-\alpha}dz + f(x)$, (14)

где $\nu(x) = (\rho(x) - c)\nu_2(x)$.

К полученному соотношению применяя оператор дробного дифференцирования $D_{x,1}^{1-\alpha}$, получим

$\Gamma(1\text{-}\alpha)\nu(x) = \mu_1 D_{x,1}^{1-\alpha} \int_x^{a_1+b_1x} \nu(z)(z-x)^{-\alpha}\,dz - \mu_2 D_{x,1}^{1-\alpha} \int_x^{a_2+b_2x} \nu(z)(z-x)^{-\alpha}dz + f_1(x)$.
(15)

Теперь вычислим дробные производные в правой части уравнения (15).

$$I_1(x) = D_{x,1}^{1-\alpha} \int_x^{a_1+b_1x} \frac{\nu(s)ds}{(s-x)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{dt}{(t-x)^{1-\alpha}} \int_x^{a_1+b_1x} \frac{\nu(s)ds}{(s-t)^\alpha}.$$

Здесь поменяем порядок интегрирования

$I_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^1 dt \int_t^{a_1+b_1x} \frac{\nu(s)ds}{(s-t)^\alpha(t-x)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\left[\int_x^{a_1+b_1x} \nu(s)ds \int_x^s \frac{dt}{(s-t)^\alpha(t-x)^{1-\alpha}} + \int_{a_1+b_1x}^x \nu(s)ds \int_{\frac{s-a_1}{b_1}}^s \frac{dt}{(s-t)^\alpha(t-x)^{1-\alpha}}\right] == I_1^*(x,s) + I_1^{**}(x,s)$,
(16)

Из (16) вычислим интеграл

$I_1^*(x,s) = \int_x^s \frac{dt}{(s-t)^\alpha(t-x)^{1-\alpha}}$;
(17)

$I_1^{**}(x,s) = \int_{\frac{s-a_1}{b_1}}^s \frac{dt}{(s-t)^\alpha(t-x)^{1-\alpha}}$.
(18)

В интеграле (17) сделав замену переменного интегрирования

$t = s - (s-x)\sigma$, получим

$I_1^*(x,s) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)$
(19)

Теперь вычислим (18). В интеграле (18) сделав замену переменного интегрирования $t = s - (s - \frac{s-a_1}{b_1})\sigma$, получим

$I_1^{**}(x,s) = \left[\frac{a_1(1-s)}{b_1(s-x)}\right]^{1-\alpha} F\left(1-\alpha, 1-\alpha, 2-\alpha; \frac{a_1(1-s)}{b_1(s-x)}\right)$. (20)

В силу (19) и (20) соотношение (17) преобразуем к виду

$$I_1(x) = \Gamma(1-\alpha)\frac{d}{dx}\int_x^{a_1+b_1x}\nu(s)ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dx}\nu(s)\int_{a_1+b_1x}^{x}\nu(s)\left(\frac{a_1(1-s)}{b_1(s-x)}\right)^{1-\alpha}F\left(1-\alpha, 1-\alpha, 2-\alpha;\ \frac{a_1(1-s)}{b_1(s-x)}\right)ds. \quad (21)$$

С учетом формулой

$$\frac{d}{dx}x^{\alpha}F(a,b,c;x)=\mathrm{a}x^{\alpha-1}F(a+1,b,c;x)$$

в (21) вычислим производную

$$I_1(x) = -\Gamma(1-\alpha)\nu(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_1+b_1x}^{1}\left(\frac{a_1(1-s)}{b_1(s-x)}\right)\frac{\nu(s)ds}{(a_1(1-s))^{\alpha}(s-a_1-b_1x)^{1-\alpha}} \quad (22)$$

Аналогично, как и выше легко убедиться, что

$$I_2(x) = D_{x,1}^{1-\alpha}\int_x^{a_2+b_2x}\nu(z)(z-x)^{-\alpha}dz = -\Gamma(1-\alpha)\nu(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_2+b_2x}^{1}\left(\frac{a_2(1-s)}{b_2(s-x)}\right)\frac{\nu(s)ds}{(a_2(1-s))^{\alpha}(s-a_2-b_2x)^{1-\alpha}} \quad (23)$$

Тепер выражения для $I_1(x)$ и $I_2(x)$, и соответственно, из (22) и (23) подставляя в (15), получим

$$\Gamma(1\text{-}\alpha)(\rho(x)-c)\nu_2(x) = I(x) + f_1(x), \quad (24)$$

где

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = -\Gamma(1-\alpha)\mu_1(\rho(x)-c)\nu_2(x) - \Gamma(1-\alpha)\mu_2(\rho(x)-c)\nu_2(x) + \frac{\mu_1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_1+b_1x}^{1}\left(\frac{a_1(1-s)}{b_1(s-x)}\right)\frac{(\rho(s)-c)\nu_2(s)ds}{(a_1(1-s))^{\alpha}(s-a_1-b_1x)^{1-\alpha}} + \frac{\mu_2}{\Gamma(\alpha)}\int_{a_2+b_2x}^{1}\left(\frac{a_2(1-s)}{b_2(s-x)}\right)\frac{(\rho(s)-c)\nu_2(s)ds}{(a_2(1-s))^{\alpha}(s-a_2-b_2x)^{1-\alpha}} + f_1(x) \quad (25)$$

С учетом (25) уравнение (24) можно переписать в виде

$$\nu_2(x) = \sum_{i=1}^{2}\int_{a_1+b_1x}^{1}\frac{K_i(x,s)\nu_2(s)ds}{(s-a_i-b_ix)^{l}} + f_2(x), \quad (26)$$

где $l = 1-\alpha$,

$$K_i(x,s) = \frac{\mu^*\sin(\alpha\pi)(\rho(x)-c)}{\pi(\rho(x)-c)(a_i(1-s))^{\alpha}}\frac{a_i(1-s)}{b_i(s-x)}, \quad i = 1{,}2.$$

$$f_2(x) = \frac{1}{1+\mu_1+\mu_2}f_1(x).$$

Изложенная задача приводится к уравнению типа '' Волтерра'' вида (26).

Литературы:

1. Салахиддинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальние задачи для уравнений смешанного с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005. '' Universitet '' . '' Yangiyo'l poliyrafservis224 с.
2. Салахиддинов М.С., Мирсабуров М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнения, вырождающегося внутри области. Дифференц. Уравнения.1981.-Том 17. $\mathcal{N}1$. C. $129-136$.
3. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Об одной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. Уз. Мат. журнал, 2010, $\mathcal{N}4$, C. $118-126$.