



# ОДНА КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА С НЕСКОЛЬКИМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ

Олимжон Самадович Ахмедов

orcid: 0000-0001-5281-2682

e-mail: axmedov.olimjon70@gmail.com

Кафедра математики, Ташкентский университет прикладных наук, Ташкент, 100149,

Республика Узбекистан

e-mail: elyor.saitov@yandex.ru

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14912912>

**Аннотация.** Предложен метод аналитико-численного решения не осесимметричной краевой задачи теории упругости для тела в виде цилиндра с несколькими цилиндрическими полостями. Решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам граничных поверхностей тела. Граничные условия задачи удовлетворяются точно при помощи аппарата обобщенного метода Фурье. В результате исходная задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оператор которой является фредгольмовым в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Разрешающая система решается численно методом редукции. Исследована практическая скорость сходимости метода редукции. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации. Достоверность результатов подтверждается сравнением их для двух случаев: цилиндра с шестнадцатью и с четырьмя цилиндрическими полостями.

**Ключевые слова:** краевая задача, обобщенный метод Фурье, разрешающая система, цилиндрическая граница, теоремы сложения.

## 1. Введение

Краевые задачи теории упругости для многосвязных тел находят приложение в моделировании напряженно-деформированного состояния в пористых и композиционных материалах [1-4]. В случае когда число границ многосвязного тела  $N \geq 3$ , практически отсутствуют эффективные методы их решения. Краевые задачи теории упругости для бесконечного цилиндра рассматривались в классических работах. Их решения были получены автором методом Фурье.

В настоящей работе приводится аналитико-численное решение не осесимметричной краевой задачи теории упругости для тела в виде цилиндра с несколькими цилиндрическими полостями. Решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам граничных поверхностей тела [5-7]. Граничные условия задачи удовлетворяются точно при помощи аппарата обобщенного метода Фурье. В результате исходная задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оператор которой является фредгольмовым в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Разрешающая система решается численно методом редукции [8-11]. Исследована практическая скорость сходимости метода редукции. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации.

## 2. Постановка задачи

Рассматриваем бесконечный упругий цилиндр  $\Omega_0$ , содержащий  $N$  цилиндрических полостей  $\Omega_j$  ( $j = 1 \div N$ ), оси которых параллельны оси цилиндра. Обозначим через  $O_j$  ( $j = 0 \div N$ ) точки, принадлежащие осям исходного цилиндра и полостей, расположенные в плоскости, перпендикулярной образующей цилиндра. Предполагается, что точки  $O_j$  ( $j = 1 \div N$ ) образуют регулярную структуру: тетрагональную, гексагональную или другую (рис. 1).

Будем использовать одинаково ориентированные цилиндрические системы координат  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$ , начала которых отнесены к точкам  $O_j$  ( $j = 0 \div N$ ). Радиусы цилиндров  $\Omega_j$  равны  $R_j$ , границы цилиндров  $\Gamma_j$  описываются уравнениями  $R_j = \rho_j$ . Предполагается, что полости расположены внутри исходного цилиндра и их границы не пересекаются [12-15]. Рассмотрим первую краевую задачу теории

упругости для указанной области. Предполагается, что к внешней границе приложена нагрузка  $f(\varphi_0, z_0)$ , которая допускает представление абсолютно и равномерно сходящимся рядом и интегралом

$$f(\varphi_0, z_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f_{x,m}(\lambda)e_x + f_{y,m}(\lambda)e_y + f_{z,m}(\lambda)e_z] \times e^{i\lambda z + im\varphi} d\lambda \quad (1)$$

где  $\{e_x, e_y, e_z\}$  — орты декартовой системы координат, сонаправленной с введенными цилиндрическими системами координат.

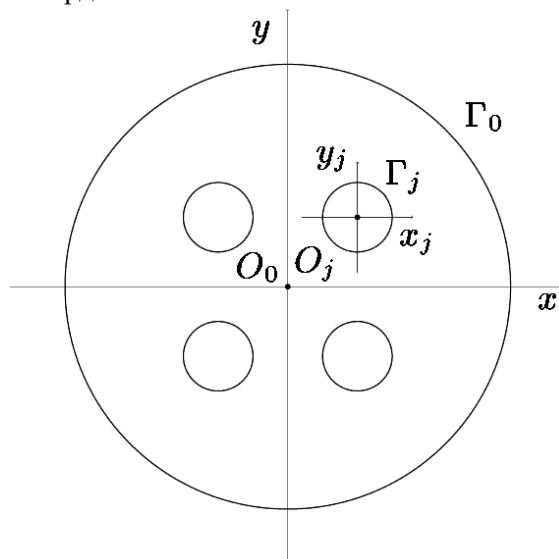


Рис. 1. Схематическое представление задачи

Считается, что вектор-функция  $f$  удовлетворяет условиям статики на поверхности  $\rho_0 = R_0$ . Вектор упругих перемещений удовлетворяет следующей краевой задаче для уравнения Ламе:

$$\nabla^2 U + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} U = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями: на внешней границе

$$FU|_{\Gamma_0} = f(\varphi_0, z_0) \quad (3)$$

и на границе полостей

$$FU|_{\Gamma_j} = 0, \quad (4)$$

где  $U$  — вектор перемещений,  $FU$  — соответствующий ему вектор напряжений,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона.

### 3. Решение задачи.

Общее решение краевой задачи (2)–(4) в области  $\Omega_0 \setminus \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$  ищется в виде суперпозиции базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам включений

$$U = \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) U_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) U_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \quad (5)$$

где  $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$  — неизвестные функции, подлежащие определению;  $U_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z)$  — базисные решения уравнения Ламе для цилиндра (знаку  $+$  ( $-$ ) соответствует внешнее (внутреннее) решение) [16–19]. В статье введено понятие базисности системы решений уравнения Ламе и доказана базисность систем:



$$\left\{U_{s,\lambda,m}^{+(3)}\right\}_{s=1,m=-\infty,\lambda=-\infty}^{3,\infty,\infty}, \quad \left\{U_{s,\lambda,m}^{-(3)}\right\}_{s=1,m=-\infty,\lambda=-\infty}^{3,\infty,\infty}.$$

Приведем явный вид этих решений:

$$U_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} D_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad s = 1, 3, \quad (6)$$

$$U_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} B_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad (7)$$

где  $D_1 = \nabla$ ,  $D_2 = \nabla_z - x e_z$ ,  $D_3 = i[\nabla \times e_z]$ ,

$$B_2 = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right) \nabla - x[e_z \times [\nabla \times e_z]];$$

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} \tilde{K}_m(\lambda\rho), \quad u_{\lambda,m}^{-(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} I_m(\lambda\rho),$$

$I_m(x)$  — модифицированная функция Бесселя,  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign} x)^m K_m(|x|)$ ,  $K_m(x)$  — функция Макдональда;  $\chi = 3 - 4\sigma$ ,  $u_{\lambda,m}^{-(3)}(\rho, \varphi, z)$  — полный набор частных решений уравнения Лапласа в цилиндрических координатах,  $i$  — мнимая единица. В развернутой координатной форме базисные решения (6), (7) имеют вид:

$$U_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1 + i u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0, \quad (8)$$

$$U_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp(D - x) \left[u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1\right] + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0, \quad (9)$$

$$U_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1, \quad (10)$$

где  $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ ,  $e_{-1} = \frac{1}{2}(e_x + i e_y)$ ,  $e_1 = \frac{1}{2}(e_x - i e_y)$ ,  $e_0 = e_z$ .

Вектор напряжений на площадке с нормалью  $n$  имеет вид

$$FU = 2G \left[ \frac{\sigma}{1 - 2\sigma} n \text{div} U + \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{1}{2}(n \times \text{rot} U) \right], \quad (11)$$

где  $G$  — модуль сдвига.

Применив к формулам (8)–(10) оператор (11) на площадке с нормалью  $n = e_\square$ , получим:

$$FU_{1,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp D u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} \mp D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_1 + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0 \right\}; \quad (12)$$

$$FU_{2,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{2G}{\rho} \left\{ \mp [(m+1)(m-1+2\sigma+\lambda^2\rho^2+(2\sigma-3)D)] u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_{-1} \right. \\ \left. \mp [(m+1)(m+1-2\sigma)+\lambda^2\rho^2+(2\sigma-3)D] u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1 \right. \\ \left. + i[m^2+\lambda^2\rho^2(2\sigma-2)D] u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0 \right\}; \quad (13)$$

$$FU_{3,\lambda,m}^{\pm(3)} = \frac{G}{\rho} \left\{ \pm(D+m-1) u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)} e_{-1} \mp (D-m-1) u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)} e_1 - i m u_{\lambda,m}^{\pm(3)} e_0 \right\}. \quad (14)$$

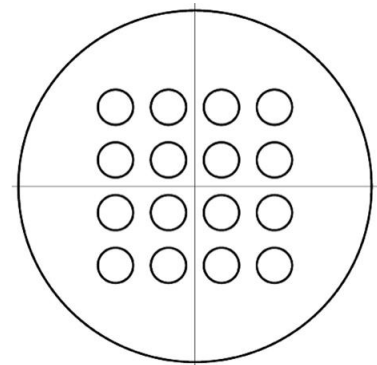
#### 4. Анализ численных результатов

При численной реализации задачи предполагалось, что к границе цилиндра приложена кусочно-постоянная нормальная нагрузка

$$FU|_{\Gamma_0} = T_{e_\rho} = \begin{cases} T, & |z| \leq h/2, \\ 0, & |z| > h/2, \end{cases}$$

и выбирались следующие значения параметров:  $R_1=R$ ,  $R_0=10R$ ,  $\sigma=0.38$ . Рассматривалась тетрагональная упаковка из  $N=16$  цилиндрических полостей, расположенных симметрично относительно оси цилиндра (рис. 2). Система (20), (21) численно решается методом редукции по параметру  $m$  ( $-m_{\max} \leq m \leq m_{\max}$ ) при фиксированных значениях  $\lambda$ , которые являются узлами квадратурной формулы Лагерра.

Рис. 2. Тетрагональная упаковка полостей



На рис. 3–5 приведены графики напряжений  $\sigma_y/T$ ,  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_z/T$  на линии, которая соединяет центры соседних полостей, ближайших к оси цилиндра, в зависимости от относительного расстояния между полостями  $a/R$  в плоскостях  $z=0$  и  $z=h$ . Вдоль горизонтальной оси откладывается относительное расстояние между границами соседних полостей. Наибольшая концентрация напряжений  $\sigma_y/T$  наблюдается на границах полостей, в то время как для напряжений  $\sigma_x/T$  — в середине линии. Характерным является изменение знака напряжения  $\sigma_z/T$  при переходе от плоскости  $z=0$  к плоскости  $z=h$ .

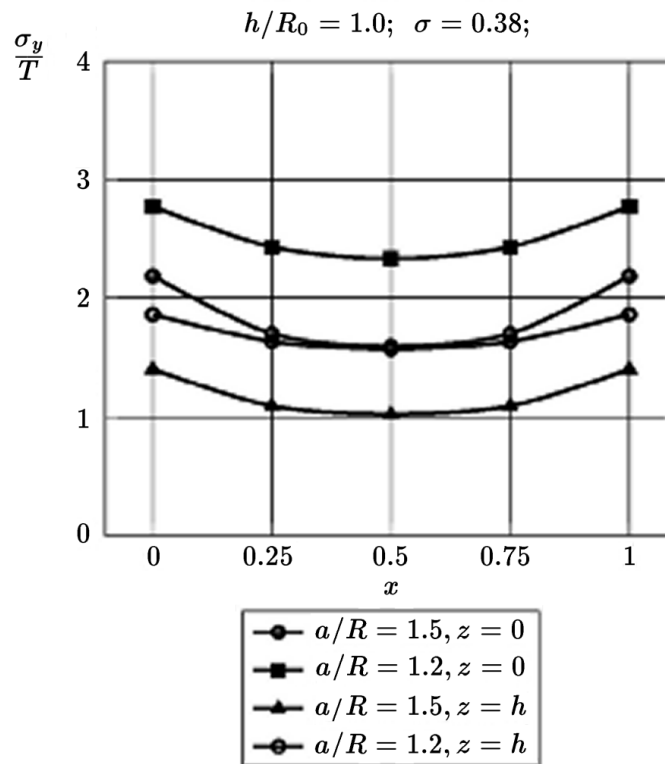


Рис. 3. Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры полостей в зависимости от относительного расстояния между ними

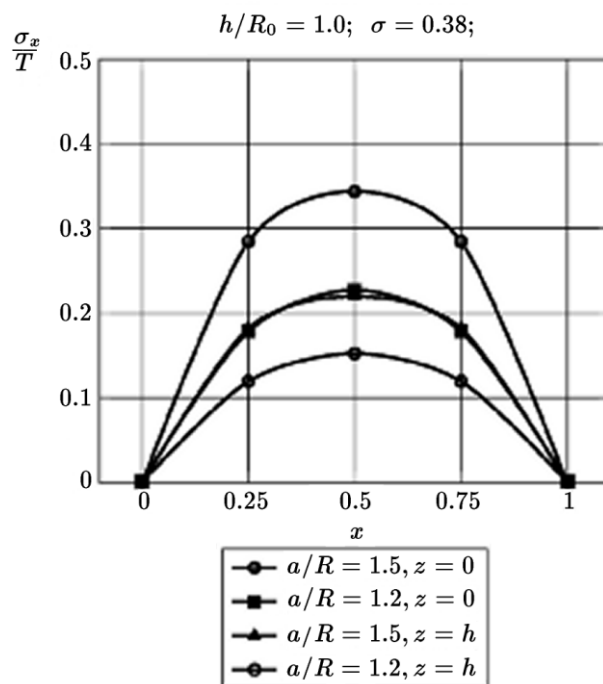


Рис. 4. Напряжения  $\sigma_x/T$  на линии, соединяющей центры полостей в зависимости от относительного расстояния между ними

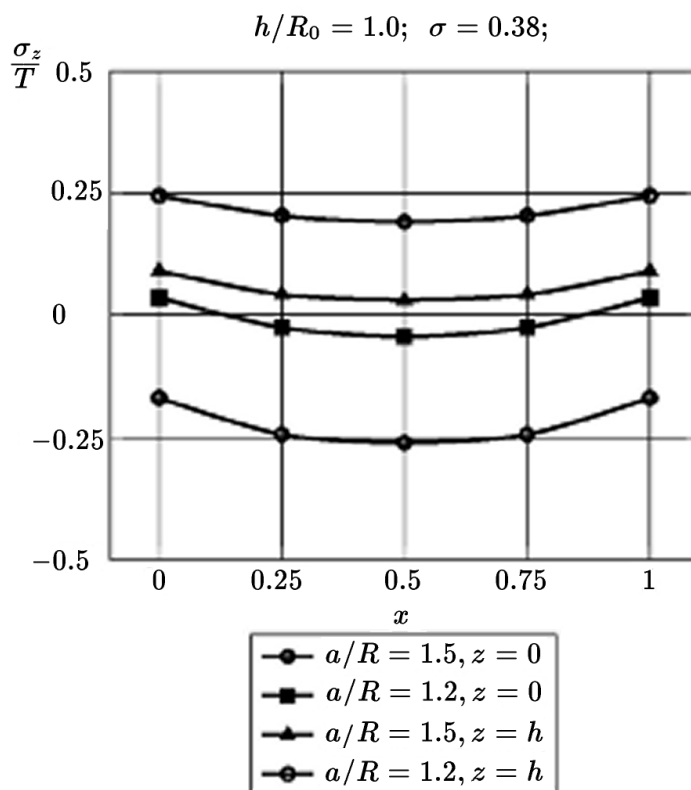


Рис. 5. Напряжения  $\sigma_z/T$  на линии, соединяющей центры полостей в зависимости от относительного расстояния между ними

На рис. 6 приведены графики напряжений  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры соседних полостей, в плоскостях  $z = 0$  и  $z = h$  в зависимости от отношения  $h/R_0$ .



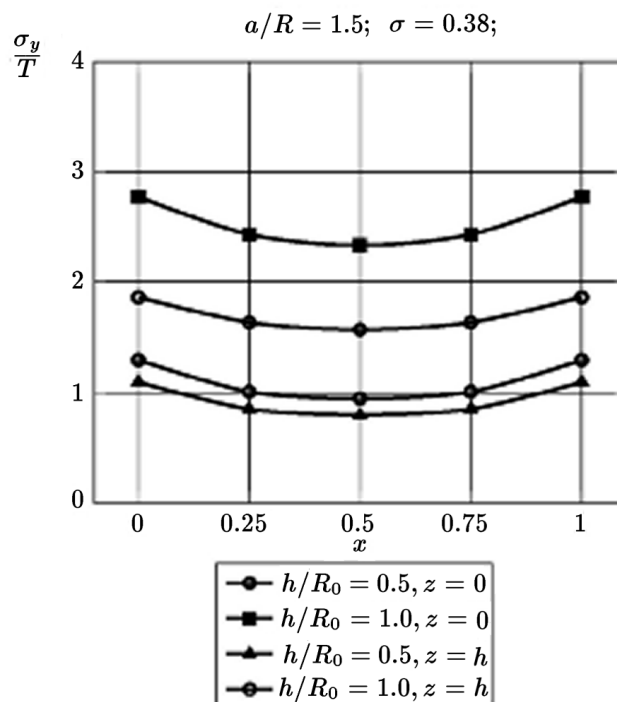


Рис. 6. Напряжения  $\sigma_y/T$  на линии, соединяющей центры полостей в зависимости от соотношения  $h/R_0$ .

На рис. 7 приведено сравнение напряжений  $\sigma_y/T$  (рис. 7а) и напряжений  $\sigma_x/T$ ,  $\sigma_z/T$  (рис. 7б) в одних и тех же точках цилиндра в зависимости от количества полостей в упаковке при  $a/R = 1.5$ ,  $h/R_0 = 1.0$ .

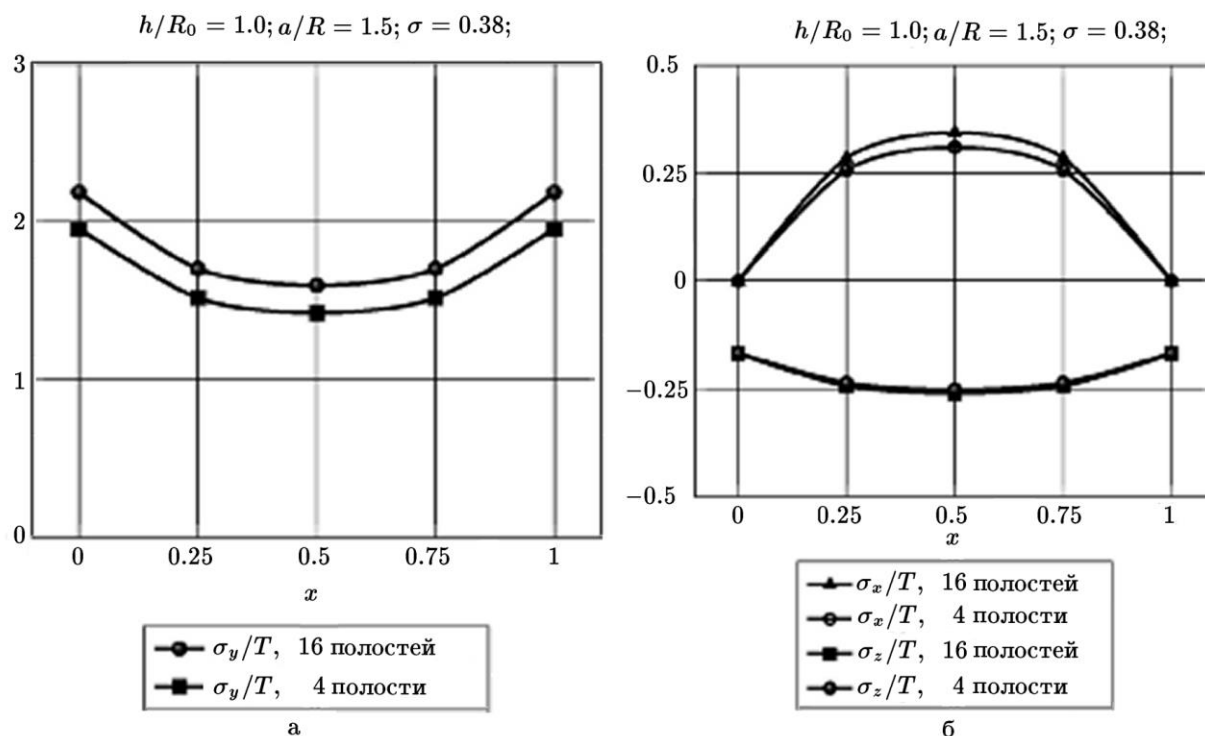


Рис. 7. Сравнение напряжений в одних и тех же точках цилиндра в зависимости от количества полостей в упаковке.

Об эффективности предложенной методики можно судить по скорости сходимости метода редукции, информация о которой содержится в таблице. В ней приведены значения нормальных



компонент тензора напряжений в средней точке линии, соединяющей центры соседних полостей в зависимости от размера редуцируемой системы при  $a/R = 1.5$ ,  $h/R_0 = 1.0$ .

**Таблица.** Сходимость метода редукции

$m_{\max}$	5	10	15	20
$\square_x/T$	0.343729	0.344384	0.344381	0.344382
$\square_y/T$	1.5964	1.59645	1.59648	1.59648
$\square_z/T$	-0.260994	-0.260695	-0.260671	-0.260669

#### 4. Заключение

Решение строится в виде суперпозиции точных базисных решений уравнения Ламе для цилиндра в системах координат, отнесенных к центрам граничных поверхностей тела [20-23]. Граничные условия задачи удовлетворяются точно при помощи аппарата обобщенного метода Фурье. В результате исходная задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оператор которой является фредгольмовым в гильбертовом пространстве  $l_2$ . Последнее обстоятельство позволяет применять при численном решении системы метод редукции. При этом известно, что решение редуцированной системы сходится к точному решению разрешающей системы при  $m_{\max} \rightarrow \infty$ . Исследована практическая скорость сходимости метода редукции, которая показывает эффективность предложенной методики. Проведен численный анализ напряжений в зонах их наибольшей концентрации. Достоверность результатов подтверждается сравнением их для двух случаев: цилиндра с шестнадцатью и с четырьмя цилиндрическими полостями.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Сафаров И.И. Колебания и волны в диссипативно неоднородных средах и конструкциях. Ташкент: Фан, 1992.-252с.
2. Математическое моделирование собственных и вынужденных колебаний криволинейных труб, взаимодействующих со средой : монография / И.И. Сафаров, М.Х. Тешаев, Н.К. Эсанов, З.К. Хамроева. – Тошкент : Фан, 2009. – 161 б.
3. Ильясов М.Х., Курбанов Н.Т. К решению интегро-дифференциального уравнения динамических задач линейной вязкоупругости // ДАН. Азерб.ССР. – 1984. – № 5.
4. Ильюшин А.А., Ларионов Г.С., Филатов А.Н. К усреднению в системах интегро-дифференциального уравнения // ДАН. СССР. – 1969. – Т. 188, № 1.
5. Ларионов Г.С. Исследование колебаний вязкоупругих систем методом усреднения // Механика полимеров. – 1969. – № 5.
6. Мирсаидов М., Трояновский И.Е. Вынужденные осесимметричные колебания вязкоупругой цилиндрической оболочки // Механика полимеров. – 1975. – № 6.
7. Ахмедов О.С. Колебания пластинки с двумя вязкоупругими покрытиями. БухДУ хабарлари 2-сон 2007 й.
8. Axmedov, O. (2022). IKKITA BUZILISH CHIZIG'IGA EGA BO'LGAN ARALASH TIPDAGI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY MASALA. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 9(9).
9. Safarov, I.I., Kulmurov, N.R., & Kuldashov, N.U. (2019). Diffraction of Surface Harmonic Viscoelastic Waves on a Multilayer Cylinder with a Liquid. Applied Mathematics, 10, pp. 468-484.
10. Akhmedov, O. S. (2023). Investigation of the oscillation of an elastic rod in time taking into account the relaxation properties of materials. ISJ Theoretical & Applied Science, 01 (117), 672-677.
11. Ахмедов Олимжон Самадович. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК. НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК БУХАРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА. 2023, № 1, Стр. 30-33.
12. Safarov, I.I., Kulmurov, N.R., Teshae, M.K., & Kuldashov, N.U. (2019). Interaction of No stationary Waves on Cylindrical Body. Applied Mathematics, 10, pp.435-447.



13. Axmedov, O. (2021). ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ОСОБЕННОСТЯМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 6(6).
14. Axmedov, O. (2022). А ЭФФЕКТИВНЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ И КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 24(24).
15. Axmedov, O. (2021). СТРАТЕГИИ ПОИСКА И ПОДДЕРЖКИ ТАЛАНТЛИВОЙ МОЛОДЕЖИ, В РАМКАХ ПРОВЕДЕНИЯ ОЛИМПИАД И ДРУГИХ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СОСТЯЗАНИЙ. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 6(6).
16. Axmedov, O. (2022). Основы и способы развития речемыслительной деятельности школьников при обучении математике: Rechemislitelnaya. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 25(25).
17. Axmedov, O. (2022). СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ В ОЛИМПИАДАХ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ КОМПЛЕКТОВ ЗАДАНИЙ. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 15(15).
18. Axmedov, O. (2022). Методологические основы восприятия математических объектов. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 8(8).
19. Axmedov, O. (2022). Особенности развивающих программ в системе обучения по курсу «Математика» в начальной школе. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 8(8).
20. Axmedov, O. (2022). Методические рекомендации по подготовке к решению нестандартных задач по математике в олимпиадах. ЦЕНТР НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ (buxdu.Uz), 8(8).
21. Ахмедов О. С., Маматохунова Ю. А. К. Некоторые эффективные методы обучения математике //Science and Education. – 2022. – Т. 3. – №. 1. – С. 790-797.
22. Ахмедов О. С., Куронбоев У. Г. У., Норбоев Ж. Б. Психолого-педагогическое обоснование понятия «познавательный интерес» //Science and Education. – 2022. – Т. 3. – №. 1. – С. 784-789.
23. Ахмедов О. С., Мусабеков Ф. М. У., Кодиров У. Ш. У. Методические подходы развивающего обучения по математике //Science and Education. – 2022. – Т. 3. – №. 1. – С. 777-783.