EURASIAN JOURNAL OF ACADEMIC RESEARCH
Innovative Academy Research Support Center
UIF = 8.1 | SJIF = 5.685 www.in-academy.uz

ОБ ОДНОСТОРОННЕЙ ОБРАТИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ С ОБРАТНЫМ СДВИГОМ

Р.Мардиев, Г.Хайдарова
Самаркандский государственный университет имена Ш. Рашидова
г.Самарканд, Республика Узбекистан.
g.mamirovna@mail.ru
https://doi.org/10.5281/zenodo.7187736

ARTICLE INFO
Received: 25th September 2022
Accepted: 27th September 2022
Online: 01st October 2022
KEY WORDS
оператор, контур, сдвиг, пространство, функция

ABSTRACT

Пусть Г- простая замкнутая гладкая ориентированная кривая комплексной плоскости, α(t)-диффеоморфизм (сдвиг) контура Г на себя, изменящий ориентацию. Получены критерии односторонней обратимости оператора $A=a(t)I-b(t)W$ где $a(t),b(t)\in C(\Gamma)$, I- единичный оператор, W- оператор сдвига $(W\varphi)(t)=\varphi[\alpha(t)],t\in\Gamma$.

Пусть Г- простая замкнутая гладкая ориентированная кривая комплексной плоскости, $\alpha(t)$-диффеоморфизм (сдвиг) контура Г на себя, изменящий ориентацию. Как известно (см, например, [1], с. 24-29), изменяющий ориентацию сдвиг обязательно имеет только две неподвижные точки z_1 и z_2. Пусть $F_1=\{z_1, z_2\}$, а γ_1-дуга, соединяющая точки z_1 и z_2 в положительном направлении от точки z_1 к точке $\left[z_2,\gamma\right]_2=\Gamma/\gamma_1$

В этой работе в пространстве $L_p(\Gamma),1\le p<\infty$ изучается функциональный оператор

$$A=a(t)I-b(t)W \qquad (1)$$

где $a(t),b(t)\in C(\Gamma)$, I- единичный оператор W- оператор сдвига:

$(W\varphi)(t)=\varphi[\alpha(t)],t\in\Gamma$.

При различных предположениях относительно контура и сдвига в работах [3,-9] изучены обратимость и односторонняя обратимость A в пространствах $L_p(\Gamma),1\le p<\infty$ и $H_\mu(\Gamma),0<\mu\le 1$.

В работе [2] получен критерий односторонней обратимости оператора A в пространствах $L_p(\Gamma),1\le p<\infty$ в случае когда сохраняий ориентацию сдвиг имеет конечное множества периоречеслих точек.

Изучение оператора A с изменяющим ориентацию сдвичом $\alpha(t),t\in\Gamma_2$. сводится к изучению оператора такого же типа, но уже с сохраняющим ориентацию сдвичом $\alpha_2(t)$. Известно, что (см. [1], с.24-29), что периодических точек сдвига α_2 равна единение.

Предположим, что сдвиг α_2 имеет произвольное множество неподвипеных точек.

Через $\Phi=\sup[\tau-\alpha_2(\tau)]$ обозначим замынания множества всех точек Г, в которых $\alpha_2(\tau)\neq\tau$. Для $u(t),a(t),b(t)\in C(\Gamma)$ положим

$$u_{\pm}(t)=\lim_{n\to\pm\infty} u(\alpha_n(t))\cdot u(\alpha_{n+1}(t)),\ \ h_{\pm}(t)=|a_{\pm}(t)|-|a'_{\pm}(t)|^{\frac{1}{p}}\cdot|b_{\pm}(t)|$$

$$\Gamma_1=\Gamma\backslash\Phi, \Gamma_2=\{t\in\Phi\colon h_{\pm}(t)>0\}, \Gamma_3=\{t\in\Phi\colon h_{\pm}(t)<0\},$$

$$\Gamma_4=\{t\in\Phi\colon h_{+}(t)<0<h_{-}(t)\}, \Gamma_5=\{t\in\Phi\colon h_{+}(t)>0>h_{-}(t)\}$$

$$\nu_A(t)=\begin{cases} a(t)a[\alpha(t)]-b(t)b[\alpha(t)], & t\in\Gamma_1\\ a(t)a[\alpha(t)], & t\in\Gamma_2\\ b(t)b[\alpha(t)], & t\in\Gamma_3\\ 0, & t\in\Gamma\backslash\bigcup_{i=1}^{3}\Gamma_i\end{cases}$$

Лемма 1: Если $\alpha(t)$ изменяет ориентацию контура Γ, то оператор A обратим справа(слева) в $L_p(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда оператор

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} aI & -bI\\ -b(\alpha)W^2 & a(\alpha)I\end{pmatrix} \qquad (1)$$

обратим справа (слева) в $L_p^2(\Gamma)$

Доказательство. Справедливо соотнаение

$$\begin{pmatrix} I & W^{-1}\\ I & -W^{-1}\end{pmatrix}\widetilde{A}\begin{pmatrix} I & I\\ W & -W\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} aI-bW & 0\\ 0 & aI+bW\end{pmatrix} \qquad (2)$$

Так как операторы

$$\begin{pmatrix} I & W^{-1}\\ I & -W^{-1}\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} I & I\\ W & -W\end{pmatrix}$$

взаимно обратимы, то из (2) следует, что оператор $\widetilde{A}$ обратим справа(слева) тогда и только тогда, когда оба оператора $A_1=aI+bW$ и $A=aI-bW$ обратимы справа(слева). Если учесть соотношение

$$Au=uA_1, \text{ где } u=\begin{cases} 1, & t\in\gamma_1\\ -1, & t\in\gamma_2\end{cases}$$

то отсюда следует одновременная обратимость справа(слева) операторов A и A_1. Лемма доказана

Лемма 2: Если оператор A обратим справа(слева) в $L_p(\Gamma)$, то

$$\inf_{t\in\Gamma}\{|a(t)|+|b(t)|\}>0 \qquad (3)$$

$$\left(\inf_{t\in\Gamma}\{|a(\alpha(t))|+|b(t)|\}>0\right) \qquad (3')$$

Доказательство. Доказательство проведем для случая левой обратимости оператора A. (случай обратимости справа рассматривается аналогично). Предположим, что оператор A обратим слева и не выполняется условие (3^'). Тогда существует такая точка t_0, что a(α(t_0))=b(t_0)=0 (4)

Так как A обратим слева и выполнено условие (4), то, в силу свойства устойчивости односторонне обратимых операторов, найдётся такая окрестность U(t_0) точки t_0 и такие функции a_0 (t),b_0 (t)∈C(Γ),b_0 (t)≡0 при t∈U(t_0),a(t)≡0 при t∈U(α(t_0)) и b(t)≡b_0 (t) при t∈Γ\U ̃(t_0), где U ̃(t_0)∈Γ- открытая окрестность точки t_0 содержащая замыкание опресность U(t_0),a(t)≡a_0 (t) при t∈Γ\a(U ̃(a(t_0))⊂Γ- открытая окрестности точки a(t_0) содержащея замыкание окрестности a(U(t_0)); причем оператор

A_0=a_0 I-b_0 W обратим слева, наряду с оператором A.

a_0 (t)φ(t)-b_0 (t)φ(α(t))=0 (7)

имеет ненулевое решение в пространстве L_p (Γ). Действительно, следующая функция

ψ(t)={■(0,t∈Γ\a(U ̃(t_0) @φ(τ), τ=t=a(U ̃(t_0))┤

где φ(τ),τ∈a(U ̃(t_0)- произвольная непрерывная функция является решением уравнения (7).

Это противоречит левой обратимости A_0. Лемма доказано.

Если выполняется (3), то найдется такая функция g(t)∈C(Γ), что

f(t)=a(t)g(t)+b(t)≠0 всюдо на Γ и оператор A ̃ можно представить в виде

〖 H〗_0 уравнение

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{I} & 0 \\ -(\mathrm{W}b\mathrm{WgI} + \mathrm{W}a\mathrm{W}^{-1})f^{-1}\mathrm{I} & f^{-1}(a(\alpha)\mathrm{I} - \mathrm{b}(\alpha)\mathrm{b}(\alpha_2)ff^{-1}(\alpha_2)\cdot \mathrm{W}^2 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a\mathrm{I} & -b\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \mathrm{gI} \end{pmatrix} \qquad 8)$$

Так как $\mathrm{f(t)} \neq 0$ всюду на Γ, то, оператор

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} gf^{-1}\mathrm{I} & bf^{-1}\mathrm{I} \\ -f^{-1}\mathrm{I} & af^{-1}\mathrm{I} \end{pmatrix}$$

является обратным оператором в $\mathrm{L}_p^2(\Gamma)$ к оператору стоящего в правой части равенства (8) второму множителю

Тогда из обратимости справа оператора $\widetilde{\mathrm{A}}$ вытекает обратимость справа оператора $\mathrm{B} = a(\mathrm{t})a(\alpha(\mathrm{t}))\mathrm{I} - b(\alpha(\mathrm{t}))b(\alpha_2(\mathrm{t}))ff^{-1}(\alpha_2(\mathrm{t}))\mathrm{W}^2$

Так как $f(\mathrm{t}) \neq 0$ всюду на Γ и $f(\tau)f^{-1}(\alpha_2(\tau)) = 1$ для любой неподвижной точки сдвига $\alpha_2(\mathrm{t})$, то, как легко заметит, оператор $\widetilde{\mathrm{B}}$ обратим справа в $\mathrm{L}_p(\Gamma)$ и только тогда, когда обратим справа оператор

$$\widetilde{\mathrm{B}} = a(\mathrm{t})a(\alpha(\mathrm{t}))\mathrm{I} - b(\alpha(\mathrm{t}))b(\alpha_2(\mathrm{t}))\mathrm{W}^2$$

(см. [2]. Лемма 1)

Если выполняется условие (3′), то найдется такая функция $\varphi(\mathrm{t}) \in \mathrm{C}(\Gamma)$, что $\psi(\mathrm{t}) = a(\alpha(\mathrm{t}))\varphi(\mathrm{t}) + b(\mathrm{t}) \neq 0$ всюду на Γ и оператор $\widetilde{\mathrm{A}}$ можно представить в виде

$$\widetilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \varphi(\mathrm{t}) & -b(\mathrm{t})\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & a(\alpha(\mathrm{t}))\mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{-1}(a(\mathrm{t})a(\alpha(\mathrm{t}))\mathrm{I} - b(\mathrm{t})b(\alpha(\mathrm{t}))\mathrm{W}^2 & 0 \\ -\psi^{-1}(a\mathrm{I} + \varphi(b(\alpha(\mathrm{t}))\mathrm{W}^2) & \mathrm{I} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Легко видеть, что из (9) вытекает, что оператор $\tilde{A}$ обратим слева в $L_p^2(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда оператор $\tilde{B_1}=a(t)a(\alpha(t))I-b(t)b(\alpha(t)) W^2$ обратим слева в $L_p(\Gamma)$.

В итого получаем следующее утверждение

Теорема 1. Оператор A обратим справа(слева) в $L_p(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда обратим справа(слева) оператор $\tilde{B}(\tilde{B_1})$ в $L_p(\Gamma)$ и выполняется условие (3)((3')).

Так как $W^2=W(\alpha_2)$ и $\alpha_2(t)$ является прямого сдвига, то к оператору $\tilde{B_1}$ применим теорема 1 работы [2] Для оператора $\tilde{B_1}$ запысивая условие этой теоремы в случае тогда A обратим слева получаем

$\forall t\in\Gamma_5,\exists k_0\in Z,$ $a(\alpha_{2k}(t))\cdot a(\alpha_{2k+1}(t))\neq 0$ при $k>k_0$

$b(\alpha_{2k}(t))\cdot b(\alpha_{2k+1}(t))\neq 0$ при $k<k_0$

Отсюда вытекает, что

$\forall t\in\Gamma_5,\exists k_0\in Z,$ $a(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k>2k_0+1$, $b(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k<2k_0$

При выполнении условия (3') это соотношение эквивалентно следующим условиям

$\forall t\in\Gamma_5,\exists k_0\in Z$ $a(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k>k_0$, $b(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k<k_0$ (10)

Для оператора $\tilde{B}$ условия теорема 1 работы [2] в случае обратимости справа оператора A запишутся в виде

$\forall t\in\Gamma_4,\exists k_0\in Z,$ $b(\alpha_{2k+1}(t))\cdot b(\alpha_{2k+2}(t))\neq 0$, при $k\geq k_0$

$a(\alpha_{2k}(t))\cdot a(\alpha_{2k+1}(t))\neq 0$ при $k<k_0$

Отсюда вытекает, что

$\forall t\in\Gamma_4,\exists k_0\in Z,$ $b(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k\geq 2k_0+1$, $a(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k<2k_0$

Если учесть, что при обратимости справа оператора A выполняется условие (3), то имеет

$\forall t\in\Gamma_4,\exists k_0\in Z,$ $b(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k\geq 2k_0+1$,

$a(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k<2k_0+1$

Это соотношения можно переписать в следующем виде:

$\forall t\in\Gamma_4,\exists k_0\in Z,$ $b(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k\geq k_0$, $a(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k<k_0$ (11)

Легко заметить, что условия (3) и (3') теоремы 1 работы [2] для операторов $\tilde{B}$ и $\tilde{B_1}$ одинаковы и имеют вид

$\nu_A(t)\neq 0,\forall t\in\Gamma\backslash\Gamma_4$ $(\forall t\in\Gamma\backslash\Gamma_5)$

Тогда отсюда и из (10), (11) окончательно получаем:

Теорема: Пуст α изменяют ориентацию контура Г. Тогда оператор A обратим справа (слева) тогда и только тогда, когда

$\nu_A(t)\neq 0,\forall t\in\Gamma\backslash\Gamma_4$ $(\forall t\in\Gamma\backslash\Gamma_5)$

и на множестве Γ_4 (Γ_5) выполняетсия условия

$\forall t\in\Gamma_4,\exists k_0\in Z,$ $b(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k\geq k_0$,

$a(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k<k_0$

(соответственно $\forall t\in\Gamma_5,\exists k_0\in Z,$ $b(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k>k_0$,

$a(\alpha_k(t))\neq 0$ при $k<k_0$)

References:

1. Литвинчук Г.С Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. М.: Наука, 1977. -448с
2. Мардиев Р. Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом//Докл. АН УзССР 1985. Т. 2. № 2.С. 5-7.
3. A. Yu. Karlovich, Fredhjlmness and index of simplest weighted singular integral operators with two slowly oscillating shifts. Banach J. Math. Anal.9 (2015) 24-42.

4. Karlovich, Alexei Yu., Yuri I. Karlovich, and Amarino B. Lebre. “Criteria for n (d)-normality of simplest weighted singular integral operators with shifts and slowly oscillating data. “Proceedings of the London Mathematical Society. 116.4 (2018): 997-1027.
5. M.A. Bastos, C Fernandes, and Yu.I Karlovich. A C *-algebra of singular integral operators with shifts admitting distinct fixed points. J. Math. Anal. Appl., 413(1):502-524, 2014.
6. Е.В. Пантелеева Условие правосторонней обратимости операторов взвешенного сдвига в пространствах вектор-функций// Вестник БГУ. СЕР.1. 2014 № 1, С 92-95
7. А.В.Антоневич, А.А.Ахматова, Ю.Маковска, “Отображения с разделимой динамикой и спектральные свойства порожденных ими операторов”, Матем. сб., 206:3 (2015), 3-34
8. A. B. Antonevich, Yu. Yakubovska, Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class Journal of Mathematical Sciences 164, (2010): 497-517.
9. Ю.И.Карлович, Р Мардиев, “Об односторонней обратимости функциональных операторов со сдвигом в просттранствах Гёльдера”, Дифференц. Уравнения, 24:3(1998), 488-499