МАТЕМАТИКАДАН ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШДА МАТЕМАТИК АНАЛИЗ МЕТОДЛАРИДАН ФОЙДАЛАНИШ

Холмуродов Элёр Ўролович
Ҳалима Худойбердиева номидаги ижод мактаби математика фани ўқитувчиси
https://doi.org/10.5281/zenodo.6054738

MAQOLA TARIXI
Qabul qilindi: 15-dekabr 2021
Ma’qullandi: 15-yanvar 2022
Chop etildi: 5-fevral 2022

KALIT SO’ZLAR
олимпиада масалалари,олимпиада китоблари, элементар ва олий математика, тўплам, мантиқий фикрлаш, математик анализ, дифференциал ҳисоб.

ANNOTATSIYA
Ушбу мақолада математикадан олимпиада масалаларини ечишда нафақат математикадан олимпиада китоблари балки олий математика бўлимининг математик анализ асослари китобидаги баъзи методлардан фойдаланиш масалалари кўрсатиб берилган.

Таълим муассасаларида математика ўқитишнинг асосий вазифаси ўқувчи ёшларни ватанга садоқат, юксак аҳлоқ, маънавий бойликка эга бўлиш ва меҳнатга виждонан муносабатда бўлиш руҳида тарбиялашга қаратилган. Таълимнинг инсонпарвар бўлишига эришиш, ҳозирги замон бозор иқтисодиёти шароитларини ҳисобга олиб ҳар бир жамият аъзосини меҳнат фаолияти ва кундалик ҳаёти учун зарур математик билим, кўникма ва малакани беришдан иборат.

Сўнгги йилларда халқаро олимпиадаларда билимли, иқтидорли ёшларимиз муваффақияти йилдан-йилга яхшиланиб бормоқда. Биз ёшларимизни бундан ҳам юқори натижаларга эришиб, давлатимиз обрў–эътиборини янада оширади деган умиддамиз. Бизнинг мақсадимиз ёш авлодни лаёқати, қобилияти, иқтидорини аниқлаш, очиш ва уларнинг ривожланиши учун имконият яратишдан иборатдир.

Зеро, олимпиада масалалари элементар ва олий математиканинг энг жозибадор масалалар тўпламидир. Олимпиада масалалари ўқувчини чуқур фикрлашга, ўз устида ишлаб, иқтидорини-малакасини такомиллаштиришга, бой ижодий тафаккурга эга бўлишга, қатъиятли инсон бўлишга ва қарор қабул қила олишга ўргатади.

Маълумки, олимпиада масалалари ўқувчиларни мантиқий фикрлаш билан бирга ўз хулосаларини асослашга ундайди. Масалаларни ечиш давомида ўқувчилар назарий билимларни такрорлайди ва уни амалий жиҳатдан қўллаш кўникмасига эга бўлади. Математикадан олимпиада масалаларини ечишда математик анализ методларидан фойдаланишни ўрганиш ва улардан фойдаланиш йўлларини топиш ўқувчиларни математикага бўлган қизиқишларини орттиради. Ушбу ишда олимпиадачи ўқувчилар севиб ишлатадиган дифференциал ҳисобнинг татбиқларини келтиришни мақсад қилиб олдик.

1. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари ёрдамида ечиладиган масалалар. Биз бандда функция ҳосиласини бир нечта масалаларга татбиқини келтирамиз.

1-масала. Агар $a \geq 0$, $b \geq 0$, $p \geq 1$ бўлса, $\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}$ бўлишини исботланг.

Исботи. Агар $a=0$ ёки $b=0$ бўлса, тенгсизликни тенглик шарти бажарилади. Шунинг учун $a \geq b > 0$ фақат ҳолатни қараймиз ва

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\frac{a}{b}+1}{2}\right)^p \leq \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^p+1}{2}$$

эканини инобатга оламиз. Ушбу функцияни тузамиз:

$$f(x)=\frac{x^p+1}{2}-\left(\frac{x+1}{2}\right)^p,\ x \geq 1,\ p \geq 1.$$

У ҳолда $f(0)=0$,

$$f'(x)=\frac{p}{2}\left(x^{p-1}-\left(\frac{x+1}{2}\right)^p\right) \geq 0 \text{ бўлади.}$$

$f'(x) \geq 0$ бўлгани учун $f(x)$ функция ўсувчи. Шунинг учун $f(x) \geq f(0)$.

Бундан $\frac{x^p+1}{2} \geq \left(\frac{x+1}{2}\right)^p$ бўлади.

$x=\frac{a}{b}$ қилиб танласак

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{a^p+b^p}{2}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

2-масала. c нинг ҳеч бир қийматида $x(x^2-1)(x^2-10)=c$ тенглама бешта бутун ечимга эга бўла олмаслигини исботланг.

Исботи. Ушбу функцияни тузамиз: $f(x)=x(x^2-1)(x^2-10)$.

Бу функция бутун сонлар ўқида аниқланган ва $f'(x)=5x^4-3x^2+10$.

1). $f'(x)=0$ тенгламани ечамиз. Бундан

$$x_1, x_4 = \pm\sqrt{\frac{33+\sqrt{889}}{10}} \text{ ва}$$

$$x_2, x_3 = \pm\sqrt{\frac{33-\sqrt{889}}{10}}$$

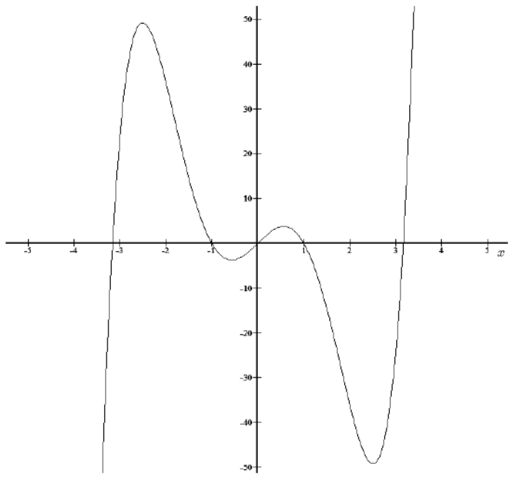
келиб чиқади.

2). $f(x)=0$ тенгламани ечамиз.

$$x(x^2-1)(x^2-10)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm 1$$

ва $x=\pm\sqrt{10}$.

3). Функция графигини ясаймиз.



Функциянинг монотонлик оралиқлари бешта:

1) $(-\infty; x_1]$, 2) $[x_1; x_2]$, 3) $[x_2; x_3]$, 4) $[x_3; x_4]$, 5) $[x_4; +\infty)$.

Шунинг учун $y=c$ тўғри чизиқ $f(x)$ функцияни кўпи билан бешта нуқтада кесиши мумкин. $[x_1;x_2]$ $([x_1;x_2]\subset(-1;1))$ монотонлик оралиғида ягона $x=0$ бутун сон бор. Демак, $c=0$ бўлгандаги $f(x)=c$ тенглама кўпи билан бешта бутун ечимга эга бўлиши мумкин.

$f(x)=0$ тенглама эса $x=0$ ва $x=\pm1$ бутун ечимларга эга. Бу ҳолат $f(x)=c$ тенглама бешта бутун ечимга эга эмаслигини билдиради.

2. Функция ҳосиласини баъзи мураккаб масалаларига тадбиқлари. Ушбу бандда функция ҳосиласининг баъзи мураккаб масалалар ечишга тадбиқларини кўриб чиқамиз.

1-теорема. $ABCD$ тўғри тўртбурчакда ихтиёрий M нуқта олинган бўлиб, $|AB|=a$, $|AD|=b$, $\lambda\ge1$ бўлса, у ҳолда

а) $\max\left\{|MA|^\lambda+|MB|^\lambda+|MC|^\lambda+|MD|^\lambda\right\}=a^\lambda+b^\lambda+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^\lambda$;

б) $\min\left\{|MA|^\lambda+|MB|^\lambda+|MC|^\lambda+|MD|^\lambda\right\}=4\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)^\lambda$

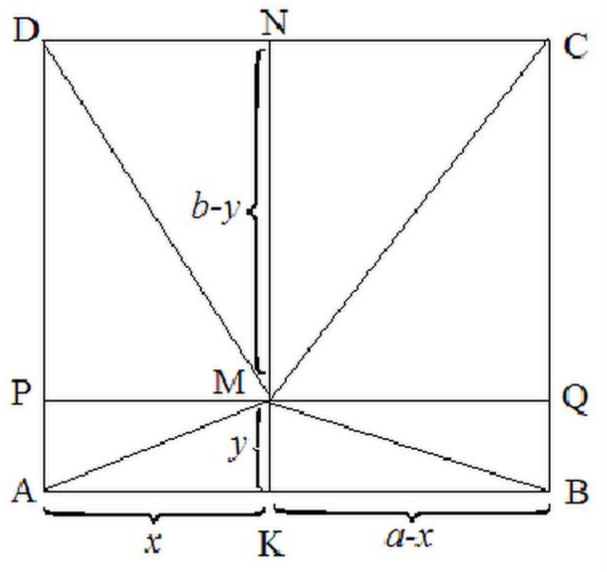
тенгликлар ўринли бўлади.

Исбот. M нуқтадан $KN\perp AB$, $PQ\perp AD$ кесмаларни ўтказамиз (1-чизма). Айтайлик, $|AK|=x$, $|MK|=y$ бўлсин. M нуқта тўртбурчакда бўлганлиги учун $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ бўлади. Пифагор теоремасига кўра:

$$|MA|^\lambda+|MB|^\lambda+|MC|^\lambda+|MD|^\lambda=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+\left((x-a)^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+$$
$$+\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+\left(x^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

Ушбу белгилашни киритиб олиб, қуйидаги икки ҳолни кўриб чиқамиз.

$$P(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+\left((x-a)^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+\left(x^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$



1-чизма

1-ҳол. $y=0$ ёки $y=b$ бўлсин. Бу ҳолда

$$P(x,0)=P(x,b)=x^\lambda+(a-x)^\lambda+\left((x-a)^2+b^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+\left(x^2+b^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

бўлганлиги сабабли фақат $P(x,0)$ ни ўрганиш етарли. $P(x,0)$ функцияни $(0,\,a)$ оралиқда x бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$P'(x,0)=\lambda\left(x^{\lambda-1}-(a-x)^{\lambda-1}+(x-a)\left((x-a)^2+b^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}+x\left(x^2+b^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}\right)$$

$$P''(x,0)=\lambda\left((\lambda-1)\left(x^{\lambda-2}-(a-x)^{\lambda-2}\right)+\left((x-a)^2+b^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left((\lambda-1)(x-a)^2+b^2\right)\right)+$$
$$+\lambda\left(x^2+b^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left((\lambda-1)x^2+b^2\right).$$

$P''(x,0)\ge0$ бўлгани учун $P'(x,0)$ функция $(0,a)$ оралиқда ўсувчи. Шунинг учун $P'(x,0)=0$ тенглама $(0,a)$ оралиқда кўпи билан битта ечимга эга бўлиши мумкин. $P'\left(\frac{a}{2},0\right)=0$ бўлгани сабабли, ягона ечим $x=\frac{a}{2}$ дан иборат бўлади. Демак, $P(x,0)$ функция $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ кесмада камаювчи, $\left[\frac{a}{2},a\right]$ кесмада эса ўсувчи бўлади. Бунга асосан қуйидаги тенгликларга эга бўламиз:

$$\max_{0\le x\le a} P(x,0)=P(0,0)=P(a,0)=a^{\lambda}+b^{\lambda}+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\lambda}$$

$$\min_{0\le x\le a} P(x,0)=P\left(\frac{a}{2},0\right)=2\left(\frac{a}{2}\right)^{\lambda}+2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

2-ҳол. $0<y<b$ бўлсин. Бу ҳолда y ўзгарувчини тайинлаб, $P(x,y)$ функцияни x бўйича биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$P'(x,y)=\lambda x\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}+\lambda(x-a)\left((x-a)^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}+$$
$$+\lambda(x-a)\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}+\lambda x\left(x^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}$$

$$P''(x,y)=\lambda\left(x^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left(x^2(\lambda-1)+y^2\right)+$$
$$+\lambda\left((x-a)^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left((x-a)^2(\lambda-1)+y^2\right)+$$
$$+\lambda\left((x-a)^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left((\lambda-1)(x-a)^2+(y-b)^2\right)+$$
$$+\lambda\left(x^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left(x^2(\lambda-1)+(y-b)^2\right)$$

Юқорида қилинган ишларни такрорлаб, ушбу

$$\max_{0\le x\le a} P(x,y)=P(0,y)=P(a,y)=y^{\lambda}+\left(a^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+\left(a^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+(b-y)^{\lambda}$$

$$\min_{0\le x\le a} P(x,y)=P\left(\frac{a}{2},y\right)=2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right)^{\lambda}+2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Энди ушбу

$$f(y)=y^{\lambda}+\left(a^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+\left(a^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+(b-y)^{\lambda},$$

$$g(y)=2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}+2\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

ёрдамчи функцияларни киритиб оламиз. Бу функциялар учун $\max\limits_{0\le x\le b} f(y)$ ва $\min\limits_{0\le x\le b} g(y)$ ларни ҳисоблаймиз. Шу мақсадда, $(0,b)$ оралиқда, $f(y)$ ва $g(y)$ функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f'(y)=\lambda y^{\lambda-1}+\lambda y\left(a^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}+\lambda(y-b)\left(a^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}-\lambda(b-y)^{\lambda-1},$$

$$f''(y)=\lambda(\lambda-1)y^{\lambda-2}+\lambda\left(a^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left(a^2+(\lambda-1)y^2\right)+$$
$$+\lambda\left(a^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left(a^2+(\lambda-1)(y-b)^2\right)+\lambda(\lambda-1)(b-y)^{\lambda-2},$$

$$g'(y)=2\lambda y\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1}+2\lambda(y-b)\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-1},$$

$$g''(y)=2\lambda\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+(\lambda-1)y^2\right)+$$
$$+2\lambda\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+(y-b)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}-2}\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2+(\lambda-1)(y-b)^2\right).$$

Бу ифодалардан $0\le y\le b$ бўлганида $f''(y)\ge 0$, $g''(y)\ge 0$ ва $f'\left(\frac{b}{2}\right)=0$, $g'\left(\frac{b}{2}\right)=0$ келиб чиқади. Демак, $f(y)$ ва $g(y)$ функциялар функциялар $y=\frac{b}{2}$ нуқтада ўзининг энг кичик қийматларига эришади, кесманинг четки нуқталарида эса энг катта қийматларга эришади, хусусан

$$\max_{0\le x\le b} f(y)=f(0)=f(b)=a^{\lambda}+b^{\lambda}+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\lambda}$$

$$,\ \min_{0\le x\le b} g(y)=g\left(\frac{b}{2}\right)=4\left(\frac{a^2+b^2}{4}\right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

бўлади. Биринчи ва иккинчи ҳолларни ҳисобга олсак, а) ва б) тенгликлар келиб чиқади. Теорема исботланди.

Натижа. Агар $\lambda=1$ бўлса, ушбу

$$\max\{|MA|+|MB|+|MC|+|MD|\}=a+b+\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\min\{|MA|+|MB|+|MC|+|MD|\}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

Тенгликлар, $\lambda=2$ бўлса, қуйидаги

$$\max\left\{|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2\right\}=2\left(a^2+b^2\right),$$

$$\min\left\{|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2+|MD|^2\right\}=a^2+b^2$$

тенгликлар ўринли бўлади.

1-масала. Юзаси S бўлган $ABCD$ – қавариқ тўртбурчакнинг AB, BC, CD, DA томонларида мос равишда M, N, P, Q нуқталар шундай олинганки, бунда

$$\frac{|AM|}{|MB|}=\frac{|BN|}{|NC|}=\frac{|CP|}{|PD|}=\frac{|DQ|}{|QA|}.$$

$MNPQ$ тўртбурчак юзасининг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш. Айтайлик, $\dfrac{|AM|}{|MB|}=\lambda$ бўлсин. У ҳолда

$$|AB|=|AM|+|MB|=(1+\lambda)|MB|,$$

$$|BC|=|BN|+|NC|=\frac{\lambda+1}{\lambda}|BN|,$$

$$|AD|=|AQ|+|QD|=\frac{\lambda+1}{\lambda}|QD|,$$

$$|CD|=|CP|+|pD|=\frac{\lambda+1}{\lambda}|PD|$$

бўлади. Буларга асосан қуйидагиларга эга бўламиз (2-чизма):

$$S_{PQD}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot S_{ACD},$$

$$S_{MBN}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot S_{ABC}.$$

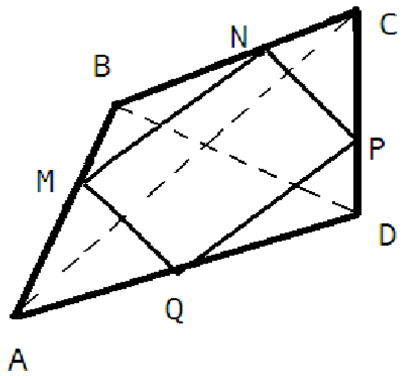
Бундан ушбу тенглик келиб чиқади:

$$S_{PQD}+S_{MBN}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot S.$$

Худди шунингдек,

$$S_{QAM}+S_{NCP}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot S$$ тенгликка

эга бўламиз.



2-чизма

Демак,

$$S_{MNPQ}=S_{ABCD}-\left(S_{QAM}+S_{NCP}+S_{MBN}+S_{PDQ}\right)=$$

$$=S-\frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2}\cdot S=\frac{\lambda^2+1}{(1+\lambda)^2}\cdot S.$$

Охирги ифоданинг энг кичик қийматини топиш мақсадида ушбу $f(\lambda)=\dfrac{\lambda^2+1}{(1+\lambda)^2}$, $\lambda>0$ функцияни киритиб оламиз ва унинг энг кичик қийматини топамиз. Бунинг учун аввало унинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(\lambda)=\frac{2\lambda\cdot(\lambda^2+1)-(\lambda^2+1)\cdot 2(\lambda+1)}{(1+\lambda)^4}=\frac{2(\lambda-1)}{(1+\lambda)^3}.$$

Бу ифодага биноан $f'(\lambda)=0$ тенгламанинг ягона ечими $\lambda=1$ бўлиб, $(0;1)$ оралиқда $f'(\lambda)<0$ ва $(1;+\infty)$ оралиқда $f'(\lambda)>0$ бўлади. Бу эса $f(\lambda)$ функциянинг энг кичик қиймати $f(1)=\dfrac{1}{2}$ га тенг эканини билдиради. Демак, $MNPQ$ тўртбурчак юзасининг энг кичик қиймати $\dfrac{1}{2}S$ га тенг бўлиб, бу қиймат юқоридаги нисбат 1 га тенг бўлганда, яъни M, N, P, Q нуқталар тўртбурчак томонларининг ўрталарида бўлганида эришилади.

2-масала. Агар a,b,c – мусбат сонлар бўлса, у ҳолда ихтиёрий λ,μ, $(\lambda\geq\mu\geq 0)$ сонлари учун ушбу

$$\frac{a^{\lambda}}{b^{\lambda}+c^{\lambda}}+\frac{b^{\lambda}}{a^{\lambda}+c^{\lambda}}+\frac{c^{\lambda}}{a^{\lambda}+b^{\lambda}}\geq\frac{a^{\mu}}{b^{\mu}+c^{\mu}}+\frac{b^{\mu}}{a^{\mu}+c^{\mu}}+\frac{c^{\mu}}{a^{\mu}+b^{\mu}} \quad (1)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. Қуйидаги функцияни қараймиз:

$$f(\lambda)=\frac{p^{\lambda}}{q^{\lambda}+1}+\frac{q^{\lambda}}{p^{\lambda}+1}+\frac{1}{p^{\lambda}+q^{\lambda}},\quad \lambda\geq 0.$$

Бунда p,q $(p\geq q\geq 1)$ – ўзгармас сонлар. Бу функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб, , $p\geq q\geq 1$ бўлгани учун $f'(\lambda)\geq 0$ бўлишини, яъни $f(\lambda)$ функция ўсувчи бўлишини топамиз. Демак, ҳар қандай λ,μ, $(\lambda\geq\mu\geq 0)$ – номанфий сонлар учун $f(\lambda)\geq f(\mu)$, яъни

$$\frac{p^{\lambda}}{q^{\lambda}+1}+\frac{q^{\lambda}}{p^{\lambda}+1}+\frac{1}{p^{\lambda}+q^{\lambda}}\geq\frac{p^{\mu}}{q^{\mu}+1}+\frac{q^{\mu}}{p^{\mu}+1}+\frac{1}{p^{\mu}+q^{\mu}}$$

тенгсизлик ўринли. Умумийликка зид иш қилмаган ҳолда $a\geq b\geq c$ деб олиб, $p=\dfrac{a}{c}$, $q=\dfrac{b}{c}$ деб танласак, у ҳолда (2) тенгсизлик қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda}}{\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda}+1}+\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda}}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda}+1}+\frac{1}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\lambda}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\lambda}}\geq\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^{\mu}}{\left(\frac{b}{c}\right)^{\mu}+1}+\frac{\left(\frac{b}{c}\right)^{\mu}}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\mu}+1}+\frac{1}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\mu}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\mu}}$$

Бу тенгсизликнинг чап ва ўнг томонларида шакл алмаштиришлар бажариб, (1) тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Энди (1) тенгсизликни баъзи хусусий ҳолларни келтириб ўтамиз.

1. Агар $\lambda\geq 0$, $\mu=0$ бўлса, ушбу тенгсизлик ҳосил бўлади:

$$\frac{a^{\lambda}}{b^{\lambda}+c^{\lambda}}+\frac{b^{\lambda}}{a^{\lambda}+c^{\lambda}}+\frac{c^{\lambda}}{a^{\lambda}+b^{\lambda}}\geq\frac{3}{2}.$$

2. Агар $\lambda=2$, $\mu=1$ бўлса, ушбу тенгсизлик ҳосил бўлади:

$$\frac{a^{2}}{b^{2}+c^{2}}+\frac{b^{2}}{a^{2}+c^{2}}+\frac{c^{2}}{a^{2}+b^{2}}\geq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

Фойдаланилган адабиётлар:

1.Умид Исмоилов. Математикадан олимпиада масалалари.Нашриёт:Янги аср авлоди.Нашр йили:2007.Тили:Ўзбек(кир).Бетлар:116.

2. М.А.Мирзааҳмедов, Ш.Н.Исмаилов. Математикадан қизиқарли ва олимпиада масалалари (1 қисм).2018 йил.

3. Б.И.Абдуллаев, Ж.У.Хужамов, Р.А.Шарипов. Математикадан олимпиада масалалари.Урганч-2016

4. Ҳ.Норжигитов, А.Х.Нуралиев. Математикадан олимпиада масалалари.Гулистон-2020

5. Т.Азларов, Ҳ.Мансуров.Математик анализ асослари.Тошкент-2005.(1-қисм)

6. Т.Азларов, Ҳ.Мансуров.Математик анализ асослари.Тошкент-2005.(2-қисм)

7. Г.Худойберганов, А.К.Ворисов, Х.Т.Мансуров, В.А.Шоимқулов. Математик анализдан маърузалар.Тошкент-2010. (1-қисм)

8. Г.Худойберганов, А.К.Ворисов, Х.Т.Мансуров, В.А.Шоимқулов. Математик анализдан маърузалар.Тошкент-2010. (2-қисм)