

IKKI O'LCHOVLI ISSIQLIK O'TKAZUVCHANLIK STATSIONAR MASALALARINI CHEKLI ELEMENTLAR USULIDA YECHISH SAMARADORLIGI VA HUSUSIYATLARI

Polatov Asxad Muxtorovich

**O'zMU, Amaliy matematika va intellektual texnologiyalar fakulteti Algoritmilar va
dasturlash kafedrası, fizika-matematika fanlari doktori, professor,**

Jabborov Jaloliddin Faxriddinovich

O'zMU Amaliy matematika va intellektual texnologiyalar fakulteti magistranti

<https://doi.org/10.5281/zenodo.7898952>

Annotatsiya. Maqolada ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini cheklangan elementlar usuli orqali yechishning hususiyatlari keltirildi. Bu usul orqali sohadagi harorat taqsimotini, temperaturaning tarqalishini, shuningdek, chegaralardagi issiqlik oqimlarini aniq hisoblash mumkin. Cheklangan elementlar usuli natijalar diskretlash, matritsalash va differensial tenglamalari yordamida aniq va ishonchli tarzda, issiqlik tizimlarini loyihalash va optimallashtirish uchun ishlatilishi aniqlandi. Bundan tashqari, chekli elementlar usulidan chiziqli bo'lmagan bir nechta materiallarni o'z ichiga olgan murakkabroq muammolarni yechishda foydalanish mumkinligi isbotlandi. Jismning temperaturani o'tkazish qobiliyatining nazariy asoslari keltirildi.

Kalit so'zlar: Diskret, matritsa, statsionar, differensial, chekli element.

Kirish. Ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini yechish turli xil muhandislik dasturlari uchun muhim hisoblanadi. Masalan, samarali issiqlik almashinuvchilarini loyihalash, binolarning issiqlik ko'rsatkichlarini optimallashtirish va elektron komponentlar uchun yanada samarali sovutish tizimlarini ishlab chiqish uchun ishlatilishi mumkin. Bundan tashqari, ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini yechish termal nurlanishning materiallarga ta'sirini o'rganish, shuningdek, murakkab tizimlarning issiqlik harakatlarini tahlil qilish uchun ishlatiladi. Tadqiqod ishining maqsadi – ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini yechish orqali ma'lum bir mintaqadagi harorat taqsimotini, shuningdek, mintaqa chegaralaridagi issiqlik oqimlarini aniqlash hisoblanadi. Ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini yechishda chekli elementlar usulidan foydalanamiz. Chekli elementlar usuli (ChEU) muhandislik va amaliy matematikadagi masalalarni yechish uchun ishlatiladigan raqamli texnika hisoblanib, murakkab masalani kichikroq, soddaroq bo'laklarga bo'lish va ularni osonroq yechish g'oyasiga asoslanadi. ChEU turli xil muammolarni, shu jumladan issiqlik uzatish, suyuqlik oqimi, stressni tahlil qilish va strukturaviy mexanika bilan bog'liq muammolarni hal qilish uchun ishlatiladi. Usul qisman differensial tenglamalar kichikroq, soddaroq masalalarga bo'lish yo'li bilan ularning yechimlarini taxminiy aniqlash uchun ishlatiladi, ularni raqamli usullar yordamida yechish mumkin. ChEU ko'plab muhandislik fanlarida, jumladan aerokosmik, avtomobilsozlik, fuqarolik, gidrotexnika, elektrotexnika va mashinasozlikda qo'llaniladi.

Yuqoridagilarni inobatga olgan holda, maqolada ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini chekli elementlar usulida yechish samaradorligi va hususiyatlari tahlil qilingan.

Tadqiqod obyekti va metodi. Sanoatda va fuqarolik sohasida ishlatiladigan issiqlik uzatish tizimlari tadqiqod obyekti hisoblanadi, bunda materialning issiqlik o'tkazish qobiliyati,

uzatish tezligi, harorat taqsimoti va issiqlik oqimlariga oid masalalar chekli elementlar usulida yechiladi.

Ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini chekli elementlar usulida yechishda tenglamalarni diskretlash, temperatura va issiqlik oqimini differensial hisoblash hamda matritsa metodidan foydalanildi.

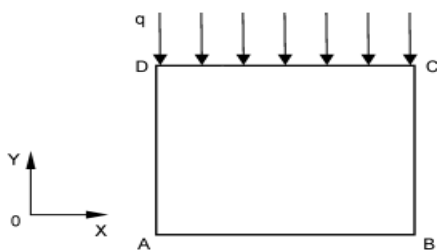
Tadqiqod natijalari va muhokama. Issiqlik uzatishni tavsiflovchi differensial tenglamalarni echishda cheklangan elementlar usuli eng samarali raqamli usul hisoblanadi. Bu statsionar ikki o'lchovli issiqlik uzatish muammolarini hal qilish uchun kuchli vosita bo'lib, ma'lum bir domendagi harorat taqsimotini aniq ko'rsatadi. Usul domenni kichik elementlar tarmog'iga diskretlashtirishni va har bir elementdagi differensial tenglamalarni echishni o'z ichiga oladi. Bu usul, ayniqsa, murakkab geometriyalar bilan bog'liq muammolar uchun foydalidir, chunki u egri chiziqli chegaralarni va boshqa xususiyatlarni osongina boshqarishi mumkin. Bundan tashqari, chekli elementlar usuli bir nechta materiallar bilan bog'liq muammolarni hal qilish uchun ishlatiladi, chunki u har bir materialda harorat taqsimotini aniq ko'rsatadi.

Turli vaqtlarda temperatura taqsimlanish masalasi ikki o'lchovli sirtida yechiladi. To'g'ri burchakli ABCD hisoblash sohasida (plastinada) (1-rasm) temperatura maydonini topish ikki o'lchovli nostatsionar issiqlik o'tkazuvchanligi masalasi quyidagi tenglama asosida yechiladi:

$$K_x \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} + Q(x, y) = 0 \quad (1)$$

bu yerda $\lambda = c\rho$ - o'ziga xos hajmli issiqlik sig'imi; c - materialning solishtirma issiqlik sig'imi; ρ zichlik; K_{xx}, K_{yy} - mos keladigan yo'nalishlarda issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyentlari $\frac{\kappa Bm}{(M \cdot K)}$.

$T(x, y)$ - qidirilayotgan temperatura funksiyasi; $\frac{\kappa Bm}{M^3}$ - jism ichidagi issiqlik manbai, Agar $Q(x, y) > 0$ bo'lsa, u holda jismga issiqlik yetkazib beriladi deb hisoblanadi.



1-rasm. Hisoblash sohasining sxemasi

XOY tekisligining ma'lum bir nuqtasida berilgan manba simli isitgich shaklida tasvirlaydi va uzunlik birligiga issiqlik chiqarish quvvati bilan beriladi, tekislikdagi berilgan nuqta simning izi sifatida xizmat qiladi.

Sohani (jismni) diskretlash ya'ni, soha ostiga bo'lish, haqiqiy jismning diskret modelini yaratish uchun foydalaniladigan soha ostilar soni, o'lchamlari va shaklini ko'rsatishni o'z ichiga oladi. Bir tomondan, maqbul natijalarga erishish uchun chekli elementlarni etarlicha

kichik tanlash kerak, boshqa tomondan, etarlicha katta chekli elementlardan foydalanish hisoblash ishlarini kamaytiradi.

Ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik masalalarini yechish uchun uchta tugunli uchburchak element keng qo'llaniladi. Chiziqli uchburchak element uchun shakl funksiyalarini quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$N_{\beta} = \frac{1}{2A}(a_{\beta} + b_{\beta}x + c_{\beta}y), \quad \beta = i, j, k \quad (2)$$

bu yerda $a_{\beta}, b_{\beta}, c_{\beta}$ (3.10) da aniqlangan ya'ni

$$\begin{cases} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{cases}, \quad \begin{cases} a_j = X_k Y_i - Y_k X_i, \\ b_j = Y_k - Y_i, \\ c_j = X_i - X_k; \end{cases}, \quad \begin{cases} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_k = Y_i - Y_j, \\ c_k = X_j - X_i. \end{cases}$$

Temperatura quyidagi formula bo'yicha berilgan

$$T = [N_i \ N_j \ N_k] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} \quad (3)$$

bu yerda T_i, T_j va T_k - i tugunidan soat mili bo'yicha harakatga teskari yo'nalishda ketma-ket o'tgan tugunlardagi temperatura qiymatlari.

[B] gradient matritsasi:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \quad (4)$$

va materialning xususiyati matritsasi [D] ni yozamiz:

$$[D] = \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Endi elementning issiqlik o'tkazuvchanlik matritsasini hisoblashimiz mumkin. Element issiqlik o'tkazuvchanlik matritsasini birinchi qo'shiluvchisi quyidagi shaklni oladi

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \int_V \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{xx} & 0 \\ 0 & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} dV \quad (6)$$

Elementlarga tegishli o'zgarmlar hisoblanadi, masalan birinchi element uchun quyidagicha:

$$\begin{aligned} b_i &= Y_j - Y_k = 1 - 1 \\ b_j &= Y_k - Y_i = 1 - 0 \\ b_k &= Y_i - Y_j = 0 - 1 \\ c_i &= X_k - X_j = 0 - 1 \\ c_j &= X_i - X_k = 0 - 0 \\ c_k &= X_j - X_i = 1 - 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Element tomonlari uzunliklari va yuzasi hisoblanadi:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ - ikki nuqta orasidagi masofa}$$

$$\begin{aligned} Z_{jk} \\ = 1 \end{aligned}$$

$$Z_{ij} = \sqrt{2}$$

$$Z_{ik} = 1$$

$$\text{Yuzasi: } A = \frac{Z_{ik} * Z_{jk}}{2}$$

Elementning issiqlik o'tkazuvchanlik matritsasi hisoblanadi:

$$k^{(e)} = \frac{K_{xx}}{4A} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} + \frac{h Z_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44 & -7 & 0 \\ -7 & 29 & -15 \\ 0 & -15 & 30 \end{bmatrix}$$

Elementning yuk vektori hisoblanadi:

$$f^{(e)} = \frac{h T Z_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 530 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Yuqoridagi hisoblashlar har bir element uchun amalga oshiriladi.

Xulosa. O'rganilgan tadqiqodlar va tahlillar natijasida cheklangan elementlar usuli ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini yechish uchun kuchli vosita ekanligi aniqlandi. Bu usul orqali sohadagi harorat taqsimotini, shuningdek, chegaralardagi issiqlik oqimlarini aniq hisoblash mumkin. Cheklangan elementlar usulidan olingan natijalar aniq va ishonchli bo'lib, issiqlik tizimlarini loyihalash va optimallashtirish uchun ishlatilishi aniqlandi. Bundan tashqari, chekli elementlar usulidan chiziqli bo'lmagan bir nechta materiallarni o'z ichiga olgan murakkabroq muammolarni yechishda foydalanish mumkinligi isbotlandi. Nihoyat, chekli elementlar usuli ikki o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik statsionar masalalarini yechish uchun iqtisodiy jihatdan samarali echimdir.

References:

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. - М: Едиториал УРСС, 2003. - 784 с.
2. Кузнецов Г.В., Шерemet М.А. Разностные методы решения задач теплопроводности. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. - 172 с.
3. Жуков Н. П., Майникова Н. Ф., Никулин С. С., Антонов О. А. Решение задач теплопроводности методом конечных элементов: -Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014. - 80 с.
4. Люкшин П. Л., Люкшин Р. А., Матолыгина Н.Ю., Панин С. В. Определение эффективных теплофизических характеристик композиционного материала. // Физическая мезомеханика 11 5 (2008) 103-110 с.
5. Mandrik P. A. Analytical solution of two-dimensional contact problems of unsteady heat conduction in the presence of mixed boundary conditions in the contact plane. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 75(1), 2002, pp. 250-255.
6. Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А., Соловьев С.Л. Теплообмен в ядерных энергетических установках. Изд-во МЭИ, 2003, 548 с.
7. Kosmakova M.T., Romanovski V.G., Akhmanova D.M., Tuleutaeva Zh.M., Bartashevich A.Yu. On the solution to a two-dimensional boundary value problem of heat conduction in a degenerating domain. Вестник Карагандинского университета, Серия «Математика». 2(98), 2020, С.100-109. DOI 10.31489/2020M2/100-109
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. - М.: Мир, 1975. - 452 с.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. - М.: Мир, 1979. - 392 с.
10. Иванников Л. М. Решение двумерной задачи теплопроводности методом конечных элементов в Mathcad. Хабаровск: Тихоокеан. гос. ун-та, 2011. -28 с.