ИККИ КАРРАЛИ ФУРЬЕ ҚАТОРИНИНГ УЧБУРЧАКЛИ ҚИСМИЙ ЙИҒИНДИЛАРИ УЧУН ЛЕБЕГ ЎЗГАРМАСИНИ АСИМПТОТИК ҲОЛАТИ ҲАҚИДА

Атабаева Д.Ж.[1]
Буваев Қ. Т.[2]
[1] Ўзбекистон миллий университети магистранти
[2] Ўзбекистон миллий университети доценти
https://doi.org/10.5281/zenodo.10118394

Қуйидаги

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} e^{i(nx+my)} \tag{1}$$

икки каррали Фурье қаторини қараймиз. Бу ерда

$$f_{nm} = (2\pi)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-i(nx+my)} dxdy$$

– Фурье коэффициентлари.

R^2 – икки ўлчовли ҳақиқий евклид фазоси, Z^2 – R^2 даги икки ўлчовли бутун сонли панжара бўлсин. Ихтиёрий $k = 0,1,2,\dots$ сонлари учун, қуйидаги учбурчакли соҳани қарайлик: $\Omega_k = \{(x,y) \in R^2 : \; x + y \le k, \; x \ge 0, \; y \ge 0\}$. Δ_k орқали ушбу $\Delta_k = \Omega_k \cap Z^2$ тенглик билан аниқланган тўпламни белгилаймиз.

$S_k f(x,y)$ – (1) қаторнинг Δ_k учбурчак бўйича қисмий йиғиндиси бўлсин, яъни:

$$S_k f(x,y) = \sum_{(n,m)\in\Delta_k} f_{nm} e^{i(nx+my)}. \tag{2}$$

Агар қуйидаги

$$D_k(x,y) = (2\pi)^{-2} \sum_{(n,m)\in\Delta_k} e^{i(nx+my)} \tag{3}$$

белгилашни киритсак, у ҳолда (2) қисмий йиғиндини ушбу

$$S_k f(x,y) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(x-t, y-h) f(t,h) dtdh \tag{4}$$

кўринишидаги интеграл оператори орқали ифодалаш мумкин. (3) тенглик билан аниқланган $D_k(x,y)$ га икки ўлчовли Дирихле ядроси деб аталади.

Энди қуйидаги нормани киритамиз:

$$\|S_k\| = \sup_{|f(x,y)|\le 1} |S_k f(x,y)|. \tag{5}$$

Одатда (5) тенглик орқали киритилган нормага Лебег ўзгармаси дейилади ва уни L_k орқали белгилаймиз. Шундай қилиб, (4) ва (5) тенгликларга кўра Лебег ўзгармаси учун қуйидаги ифодага эга бўламиз:

$$L_k = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_k(x,y)| dxdy. \tag{6}$$

Мазкур ишда L_k Лебег ўзгармасини $k\to\infty$ даги асимптотик ҳолати ўрганилган. Эслатиб ўтамиз, бутун текислик бўлган ҳол учун мазкур масала [1] ишда ўрганилган ва қуйидаги натижа олинган: $k\to\infty$ да ушбу

$$L_k = 16\pi^{-4}\ln^2 k + O(\ln k) \qquad (7)$$

асимптотик тенглик ўринли.

Асосий натижани олишда $D_k(x,y)$ йиғиндини жамлаш масаласи муҳим рол ўйнайди. Бунинг учун (3) ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$D_k(x,y) = \sum_{(n,m)\in\Delta_k} e^{i(nx+my)} = \sum_{n=0}^{k} e^{inx} \sum_{m\le k-n} e^{imy}. \qquad (8)$$

Лемма. $\forall k = 0,\ 1,\dots$ *ва ушбу* $x^2+y^2\neq 0$ *муносабатни қаноатлантирувчи* $\forall (x,y)\in\Omega_k$ *лар учун қуйидаги*

$$D_k(x,y) = \frac{1}{4\sin\frac{y}{2}}\times$$

$$\times\left\{\frac{\sin\left(\frac{k}{2}+1\right)(x-y)\cos\frac{k}{2}(x+y) - \cos\frac{k+1}{2}(x+y)\sin\frac{k+1}{2}(x-y) - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x-y}{2}}+\right.$$

$$\left.+i\frac{\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}+\sin\left(\frac{k}{2}+1\right)(x-y)\sin\frac{k}{2}(x+y)-\sin\frac{k+1}{2}(x+y)\sin\frac{k+1}{2}(x-y)}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x-y}{2}}\right\}. \qquad (9)$$

тенглик ўринли.

Юқоридаги леммадан фойдаланиб, қуйидаги асосий теоремани исботлаш мумкин.

Теорема. *Ушбу*

$$L_k = C\ln^2 k + O(\ln k) \qquad (10)$$

асимптотик тенглик $k\to\infty$ *да текис бажарилади, бу ерда* C k *га боғлиқ бўлмаган қандайдир сон.*

References:

1. Даугавет И. К. О постоянных Лебега двойных рядов Фурье. Методы вычислений. Л.. Издателство Ленинградский университет, №3, 1970, 8-13.