

FAZODA CHIZIQ VA TEKISLIK ORASIDAGI MUNOSABATLARNI DETERMINANT VA GRADIENT YORDAMIDA ANIQLASH

Abbosova Muhpira O'lmasboy qizi
NamDU, Matematika yo'nalishi talabasi
E-mail: abbosovamuhfira@gmail.com

Maxmudova Dilnoza Xaytmirzayevna

Ilmiy rahbar: Matematika kafedrası katta o'qituvchisi
<https://doi.org/10.5281/zenodo.17787610>

Annotatsiya: Ushbu maqolada fazoda berilgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi o'zaro joylashuv (kesishish, parallel bo'lish, chiziqning tekislik ichida yotishi) determinant va gradient tushunchalari yordamida tahlil qilinadi. Tekislik sath funksiyasi uchun gradient vektori va chiziq tenglamasi parametri asosida yangi tasniflovchi funksiya kiritiladi. Shuningdek, chiziq va tekislik kesishish nuqtasini determinantlar orqali, Kramer qoidasi yordamida ifodalovchi formulalar beriladi. Natijada chiziq–tekislik munosabatlarini klassifikatsiya qiluvchi yangi teorema isbotlanadi. Taklif etilgan yondashuv fazoviy modellashtirish, hisoblash geometriyasi va kompyuter grafikasi sohalarida qo'llanilishi mumkin.

Kalit so'zlar: chiziq, tekislik, determinant, gradient, kesishish, parallel, yangi teorema.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМОРАСПОЛОЖЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ С ПОМОЩЬЮ ДЕТЕРМИНАНТА И ГРАДИЕНТА

Аннотация: В данной статье исследуется взаимное расположение прямой и плоскости в евклидовом пространстве (пересечение, параллельность, принадлежность прямой плоскости) с использованием понятий детерминанта и градиента. На основе градиента уровня функции плоскости и параметрического уравнения прямой вводится новая классифицирующая функция. Кроме того, с помощью правила Крамера получены формулы для координат точки пересечения прямой и плоскости в детерминантной форме. В результате доказывается новая теорема, классифицирующая все возможные случаи взаимного расположения прямой и плоскости. Предложенный подход может применяться в пространственном моделировании, вычислительной геометрии и компьютерной графике.

Ключевые слова: прямая, плоскость, детерминант, градиент, пересечение, параллельность, новая теорема.

DETERMINING THE RELATION BETWEEN A LINE AND A PLANE IN SPACE USING DETERMINANTS AND GRADIENTS

Abstract: This paper investigates the mutual position of a line and a plane in three-dimensional Euclidean space (intersection, parallelism, and incidence of the line in the plane) using determinants and gradients. Based on the gradient of the level function of the plane and the parametric equation of the line, a new classifying function is introduced. Furthermore, by applying Kramer's rule, determinant formulas are obtained for the coordinates of the intersection point between the line and the plane. As a result, a new theorem is proved that fully classifies all possible line–plane configurations. The proposed approach can be applied in spatial modeling, computational geometry, and computer graphics.

Keywords: line, plane, determinant, gradient, intersection, parallelism, new theorem.

1. Kirish

Fazoda chiziq va tekislik orasidagi munosabatlarni aniqlash klassik analitik geometriyaning asosiy masalalaridan biridir. Amaliy nuqtai nazardan bu masala kompyuter grafikasi, 3D modellash, robototexnika, mexanik tizimlar geometriyasi va turli fizik modellarni soddalashtirishda alohida ahamiyatga ega. Odatda chiziq va tekislik munosabatlari skalyar ko'paytmalar, tekislik tenglamasini chiziq tenglamasiga qo'yish va hosil bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasi yordamida tahlil qilinadi. Biroq bu yondashuvni determinant va gradient tushunchalari orqali yagona, invariant va soddalashtirilgan ko'rinishga keltirish imkoniyati yetarlicha ochib berilmagan.

Tekislik ko'pincha sath funksiyasining nol darajali sathi sifatida ko'riladi:

$$\Pi: f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0.$$

Bu yerda $\nabla f = (A, B, C)$ vektor tekislikning normal vektori bo'lib xizmat qiladi. Chiziq esa odatda parametrik ko'rinishda beriladi:

$$l: \vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{v}, t \in \mathbb{R},$$

bu yerda $\vec{v}$ chiziq yo'nalish vektori.

Ushbu maqolada aynan shu ikki yozuvni determinant va gradient nuqtai nazaridan birlashtirib, chiziq–tekislik munosabatlarini tasniflashning yangi teoremasi keltiriladi. Gradient tekislikning normal yo'nalishini ifodalashi, determinant esa chiziq–tekislik kesishish parametri uchun Kramer qoidasini berishi tufayli ular orqali munosabatlarni aniqlash ancha ixcham va tushunarli bo'ladi.

2. Metod

Metodning asosi — tekislikni sath funksiyasi ko'rinishida, chiziqni esa parametrik ko'rinishda ifodalab, ularning o'zaro munosabatini gradient va determinantlar orqali tavsiflashdir. Tekislik:

$$f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0,$$

chiziq esa:

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{v} = (x_0, y_0, z_0) + t(p, q, r)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (p, q, r)$, $\nabla f = (A, B, C)$.

Birinchi qadam — chiziq nuqtalarini tekislik sath funksiyasiga qo'yib, bir o'lchovli funksiya hosil qilishdir:

$$\varphi(t) = f(\vec{r}(t)) = A(x_0 + tp) + B(y_0 + tq) + C(z_0 + tr) + D.$$

Bu ifodani ochsak:

$$\varphi(t) = (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) + t(Ap + Bq + Cr).$$

Bu yerda:

$$\varphi(0) = f(\vec{a}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D,$$

$$\varphi'(t) = Ap + Bq + Cr = \nabla f \cdot \vec{v}.$$

emak, gradient bilan chiziq yo'nalish vektorining skalyar ko'paytmasi chiziq bo'ylab tekislik funksiyasining o'zgarish tezligini ifodalaydi.

Endi determinantlar ko'rinishiga o'tamiz. Tekislik tenglamasini chiziq tenglamasiga qo'yishdan kelib chiqadigan chiziqli tenglama:

$$\nabla f \cdot \vec{a} + t(\nabla f \cdot \vec{v}) + D = 0$$

ya'ni:

$$(\nabla f \cdot \vec{v}) t = -(\nabla f \cdot \vec{a} + D).$$

Agar $\nabla f \cdot \vec{v} \neq 0$ bo'lsa, Kramer qoidasiga o'xshash tarzda:

$$t^* = -\frac{\nabla f \cdot \vec{a} + D}{\nabla f \cdot \vec{v}}.$$

Bu kasrni determinantlarda quyidagicha yozish mumkin (koordinatalar bo'yicha):

$$\nabla f \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ skalyar ko'paytma bilan ekvivalent}$$

$$\nabla f \cdot \vec{a} + D = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{vmatrix} \text{ chiziqli kombinatsiya sifatida}$$

Amalda biz quyidagi determinant shaklidan foydalanamiz:

- tekislik: $Ax + By + Cz + D = 0$,
- chiziq nuqtasi tekislikda yotadimi, aniqlash uchun:

$$\Delta(\vec{a}) = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{vmatrix} = f(\vec{a}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

$-\Delta(\vec{a}) = 0$ bo'lsa, nuqta tekislikda;

- $\Delta(\vec{a}) \neq 0$ bo'lsa, nuqta tekislikda emas.

Shunday qilib, metod quyidagicha ishlaydi:

1. Gradient orqali $\nabla f \cdot \vec{v}$ ni hisoblaymiz.
2. $\Delta(\vec{a}) = f(\vec{a})$ ni aniqlaymiz.
3. Bu ikki sonning nolga teng/teng emasligiga qarab chiziq-tekislik munosabatlarini tasniflaymiz.
4. Agar kerak bo'lsa, kesishish parametrini t^* determinant ko'rinishida ifodalaymiz.

3. Natija

Metod asosida chiziq va tekislik orasidagi munosabatlarni to'liq tasniflash mumkin bo'ldi.

Asosiy natija sifatida gradient va determinant yordamida quyidagi hollarga ajratish mumkin:

- Chiziq tekislikni **bitta nuqtada kesadi**;
- Chiziq tekislikka **parallel**, lekin ichida emas;
- Chiziq tekislik **ichida yotadi**.

Bu hollarning barchasi faqat ikkita son: $\nabla f \cdot \vec{v}$ va $\Delta(\vec{a}) = f(\vec{a})$ orqali aniqlanadi.

Endi ushbu natijani rasmiy teorema ko'rinishida bayon qilamiz.

Teorema.

$\Pi: f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik va

$$l: \vec{r}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$$

chiziq berilgan bo'lsin. Quyidagilarni belgilaymiz:

$$g = \nabla f \cdot \vec{v} = Ap + Bq + Cr, \delta = f(\vec{a}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

U holda:

1. Agar $g \neq 0$ bo'lsa, chiziq tekislikni yagona nuqtada kesadi va kesishish nuqtasining parametri:

$$t^* = -\frac{\delta}{g}.$$

Agar $g = 0$ va $\delta \neq 0$ bo'lsa, chiziq tekislikka parallel, ammo uni kesmaydi (ya'ni tekislikdan masofada yotadi).

2. Agar $g = 0$ va $\delta = 0$ bo'lsa, chiziq to'liq tekislik ichida yotadi.

Bundan tashqari, g va δ quyidagi determinantlar yordamida ifodalanadi:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{vmatrix}, g = \nabla f \cdot \vec{v}.$$

Isbot.

$\varphi(t) = f(\vec{r}(t))$ funksiyani ko'rib chiqamiz:

$$\varphi(t) = f(\vec{a} + t\vec{v}) = \delta + gt.$$

Tekislik bilan kesishish nuqtalari $\varphi(t) = 0$ yechimlariga mos keladi:

$$\delta + gt = 0.$$

-Agar $g \neq 0$, unda tenglama yagona yechimga ega: $t^* = -\delta/g$. Demak, chiziqli tekislikni aynan bitta nuqtada kesadi.

-Agar $g = 0$ va $\delta \neq 0$, unda $\varphi(t) \equiv \delta$ doimiy va hech qachon 0 ga teng bo'lmaydi. Demak, chiziqli tekislikni kesmaydi, $\nabla f \cdot \vec{v} = 0$ bo'lgani uchun esa chiziqli tekislikka parallel.

-Agar $g = 0$ va $\delta = 0$, unda $\varphi(t) \equiv 0$ bo'ladi, ya'ni chiziqli tekislik tenglamasini qanoatlantiradi. Shuning uchun chiziqli to'liq tekislik ichida yotadi.

δ ning determinant ko'rinishi tekislik tenglamasiga nuqta koordinatalarini qo'yishning linearlashtirilgan ifodasidan, g esa gradient va yo'nalish vektori skalyar ko'paytmasidan kelib chiqadi. Teorema isbotlandi. ■

4. Muhokama

Olingan teorema chiziqli va tekislik munosabatlarini juda ixcham va tushunarli ikki son — δ va g orqali tasniflash imkonini berdi. Klassik yondashuvda chiziqli koordinatalarini tekislik tenglamasiga qo'yib, keyin hosil bo'lgan ifodani uzun-uzun yechish talab etilardi. Bu yerda esa gradientning chiziqli bo'ylab hosil qiladigan o'zgarish tezligi (g) va chiziqdagi bitta nuqtaning tekislikka "qarindoshligi" (δ) chiziqli-tekislik munosabatlarini to'liq belgilab beradi.

Gradientdan foydalanishning afzalligi shundaki, u tekislikni sath funksiyasi sifatida ko'rishga imkon beradi. Chiziqli bo'ylab f funksiyaning $\varphi(t) = \delta + gt$ ko'rinishga ega bo'lishi barchasini bir o'lchamli analiz darajasiga tushiradi. Bu esa nazariy jihatdan ham, hisoblash nuqtai nazaridan ham foydali. Ayniqsa, kompyuter grafikasi va 3D dvigatellarida chiziqli-tekislik kesishuvini topish eng ko'p bajariladigan amallardan biri hisoblanadi; teorema buni minimal hisob-kitoblar bilan bajarish imkonini beradi.

Determinantlardan foydalanish esa natijalarni koordinatalarga nisbatan invariant ko'rinishda ifodalashga yordam beradi. δ ning determinant ko'rinishi tekislik tenglamasi va nuqta koordinatalari o'rtasidagi aloqani kompakt yozishga xizmat qiladi. Bu, ayniqsa, ko'p sonli chiziqli va tekisliklar bilan ishlaganda, algoritmlarni matritsa ko'rinishida amalga oshirish uchun qulay.

Muhokama shuni ko'rsatadiki, determinant va gradientning birgalikdagi qo'llanishi chiziqli-tekislik geometriyasini bir tomondan sath funksiyalari nazariyasi, ikkinchi tomondan chiziqli algebra bilan mustahkam bog'laydi. Bu yondashuvni egri sirtlar, nolinear sathlar va yuqori o'lchamli fazolarga ham kengaytirish mumkin. Masalan, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ gipertekisligi va parametrik chiziqlar uchun gradient-yo'nalish skalyar ko'paytmasi va determinantli klassifikatsiya o'xshash tarzda ishlaydi.

5. Xulosa

Maqolada fazoda chiziqli va tekislik orasidagi munosabatlarni determinant va gradient yordamida aniqlashning yangi yondashuvi ishlab chiqildi. Tekislik sath funksiyasi va uning gradienti, shuningdek chiziqli parametrik tenglamasi asosida $\delta = f(\vec{a})$ va $g = \nabla f \cdot \vec{v}$ sonlari kiritildi va ular yordamida chiziqli-tekislik munosabatlarining to'liq klassifikatsiyasi berildi.

Yangi teorema ushbu ikki sonning nolga teng yoki teng emasligiga qarab chiziqning tekislikni kesishi, tekislikka parallel bo'lishi yoki tekislik ichida yotishini aniqlaydi.

Determinant shaklidagi ifodalar natijaning algebraik strukturasini ochib berdi va nuqtaning tekislikka tegishliligini kompaksiz ifodalash imkonini yaratdi. Gradient esa sath funksiyasining lokal o'zgarish tezligini chiziq bo'ylab kuzatish imkonini berib, masalani bir o'lchamli chiziqli tenglamaga keltirdi. Bu yondashuv nazariy geometriya bilan birga, amaliy hisoblashlar uchun ham juda qulay.

Kelgusida ushbu yondashuvni quyidagi yo'nalishlarda rivojlantirish mumkin:

- nolinear sathlar va egri chiziqlar uchun gradient–determinant klassifikatsiya usullarini ishlab chiqish;
- ko'p chiziq–ko'p tekislik sistemalarida massiv kesishishlarni aniqlash algoritmlarini yaratish;
- hisoblash geometriyasi va grafik dvigatellarda bu teorema asoslangan optimallashtirilgan funksiyalarni qo'llash.

Shunday qilib, chiziq va tekislik orasidagi munosabatlarni determinant va gradient yordamida aniqlash yondashuvi geometriyaga yangi, ixcham va kuchli matematik vosita qo'shadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 74–78). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.15186643>
2. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 35–40).
3. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.
4. Abdiqayumov, A., & Mahmudova, D. (2025). CENTRAL AND PARALLEL PROJECTIONS AND THEIR PROPERTIES. *Теоретические аспекты становления педагогических наук*, 4(8), 177–184. извлечено от <https://inlibrary.uz/index.php/tafps/article/view/83478>
5. Dilnoza, M. Use of the Acmeological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
6. Mahmudova, D. K. (2020). Significance of acmeological approach in improving the cognitive competence of the future teachers. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, 2(4), 426-433.