

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLARNING QUTB KOORDINATALARIDAGI UMUMIY TENGLAMASI VA ULARNING SINFLANISHI

Xoshimova Dilobar

Shahrisabz davlat pedagogika instituti o'qituvchisi

Ulasheva Anvara

Shahrisabz davlat pedagogika instituti talabasi

Berdiyeva Sevara

Shahrisabz davlat pedagogika instituti talabasi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.15709197>

Annotatsiya.

Mazkur maqolada ikkinchi tartibli chiziqlarning qutb koordinatalaridagi umumiy tenglamasi va ularning sinflanishi masalasi ko'rib chiqilgan. Qutb koordinatalari yordamida konik chiziqlarni ifodalash va tahlil qilish usullari, ularning r va θ orqali ifodalanishi, hamda bu tenglamalarni sinflashtirish mezonlari (aylana, ellips, parabola va giperbola) nazariy va matematik asosda yoritilgan. Shuningdek, chiziqlarning geometrik xossalarini aniqlashda diskriminantdan foydalanish va maxsus holatlar misolida izohlangan. Maqola yakunida nazariy qoidalar misol bilan mustahkamlangan va mavzuning amaliy ahamiyati ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: *Qutb koordinatalari, ikkinchi tartibli chiziqlar, konik kesimlar, aylana, parabola, ellips, giperbola, analitik geometriya, diskriminant, matematik tahlil.*

Annotation. This article considers the general equation of second-order lines in polar coordinates and their classification. Methods of expressing and analyzing conic sections using polar coordinates, their expression in terms of r and θ , and the criteria for classifying these equations (circle, ellipse, parabola, and hyperbola) are covered on a theoretical and mathematical basis. Also, the use of the discriminant in determining the geometric properties of lines and special cases are explained by example. At the end of the article, the theoretical rules are reinforced with an example and the practical significance of the topic is shown.

Keywords: *Polar coordinates, second-order lines, conic sections, circle, parabola, ellipse, hyperbola, analytical geometry, discriminant, mathematical analysis.*

Аннотация. В данной статье рассматривается общее уравнение прямых второго порядка в полярных координатах и их классификация. На теоретической и математической основе рассматриваются методы выражения и анализа конических сечений с использованием полярных координат, их выражение через r и θ , а также критерии классификации этих уравнений (окружность, эллипс, парабола и гипербола). Также на примере поясняется использование дискриминанта при определении геометрических свойств прямых и частных случаев. В конце статьи теоретические правила подкрепляются примером и показывается практическая значимость темы.

Ключевые слова: *Полярные координаты, прямые второго порядка, конические сечения, окружность, парабола, эллипс, гипербола, аналитическая геометрия, дискриминант, математический анализ.*

Kirish

Analitik geometriya fani fazodagi geometrik shakllarni algebraik usullar yordamida o'rganishga xizmat qiladi. Bu yo'nalishdagi muhim obyektlardan biri — ikkinchi tartibli chiziqlar bo'lib, ular o'z ichiga aylana, ellips, parabola va giperbola kabi konik kesimlarni oladi. Mazkur chiziqlar ko'plab matematik modellashirishda, ayniqsa fizikaviy va muhandislik

sohalarida keng qo'llaniladi. Ularning asosiy xossalari, shakli, o'qi va markaziga doir masalalar odatda Dekart koordinatalar tizimida tahlil qilinadi. Biroq, ayrim holatlarda — masalan, markaz yoki fokus muhim rol o'ynaydigan sistemalarda — qutb koordinatalari orqali ifodalash ko'proq qulaylik yaratadi.

Qutb koordinatalar tizimi — nuqtaning holatini radius (masofa) va burchak orqali aniqlovchi tizim bo'lib, ayniqsa fokus atrofida simmetrik joylashgan chiziqlarni tasvirlashda o'z afzalligini namoyon etadi.

Nazariy asos. Geometrik shakllarni tahlil qilishda odatda Dekart koordinatalari (x, y) ishlatiladi. Biroq, ba'zi hollarda, ayniqsa markaz yoki fokus atrofidagi simmetriklikni tahlil qilishda qutb koordinatalari (r, θ) qulayroq bo'ladi. Qutb koordinatalarida nuqta holati ikki parametr orqali belgilanadi: r — qutbdan (boshlang'ich nuqtadan) bo'lgan masofa, θ esa asosiy o'qda hosil qilgan burchak.

Qutb va Dekart koordinatalari o'rtasida quyidagi o'zaro bog'liqlik mavjud:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Ikkinchi tartibli chiziqlar umumiy ko'rinishda quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Bu tenglamani qutb koordinatalariga o'tkazish uchun va y ni yuqoridagi formulalar bilan almashtiramiz:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Natijada quyidagicha murakkabroq ifoda hosil bo'ladi:

$$A(r \cos \theta)^2 + B(r \cos \theta)(r \sin \theta) + C(r \sin \theta)^2 + D(r \cos \theta) + E(r \sin \theta) + F = 0$$

Bu tenglamani soddalashtirsak:

$$r^2(A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta) + r(D \cos \theta + E \sin \theta) + F = 0$$

Bu — qutb koordinatalaridagi ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasidir.

Mazkur tenglamaning tuzilishi shuni ko'rsatadiki, bu yerda chiziqning turi (aylana, ellips, parabola yoki giperbola) koeffitsientlarning qiymatiga bog'liq. Aynan shu tenglamani diskriminant usuli yordamida sinflashtirish mumkin.

Dekart sistemadagi kabi, quyidagi qiymat asosida chiziqning turi aniqlanadi:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Agar bu diskriminant qutb koordinatalaridagi ifodaga o'tkazilgan tenglama bilan bog'lanadigan bo'lsa, quyidagi holatlar yuzaga keladi:

- Agar $\Delta < 0$, chiziq ellips yoki aylana bo'ladi.
- Agar $\Delta = 0$, chiziq parabola bo'ladi.
- Agar $\Delta > 0$, chiziq giperbola bo'ladi.

Demak, qutb koordinatalarida hosil bo'lgan tenglama qanchalik murakkab bo'lmasin, u asosiy ko'rsatkich — koeffitsientlar kombinatsiyasi orqali tahlil qilinadi.

Matematik asos. Ikkinchi tartibli chiziqlar analitik geometriyada umumiy ko'rinishda quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Bu tenglamada A, B, C, D, E, F — haqiqiy sonli koeffitsientlar. Ushbu tenglama geometrik jihatdan aylana, ellips, parabola yoki giperbola bo'lishi mumkin.

Bu tenglamani qutb koordinatalariga o'tkazish uchun quyidagi almashtirish formulalari ishlatiladi:

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

Bu ifodalarni yuqoridagi umumiy tenglamaga qo'ysak, quyidagiga ega bo'lishimizni ko'rib o'tdik va soddalashtirib oldik:

$$A(r \cos \theta)^2 + B(r \cos \theta)(r \sin \theta) + C(r \sin \theta)^2 + D(r \cos \theta) + E(r \sin \theta) + F = 0$$

$$r^2(A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta) + r(D \cos \theta + E \sin \theta) + F = 0$$

Bu tenglama quyidagicha umumiyashtiriladi:

$$r^2 P(\theta) + r Q(\theta) + F = 0$$

Bu yerda: $P(\theta) = A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta$

$$r Q(\theta) = (D \cos \theta + E \sin \theta)$$

Bu kvadratik tenglama r bo'yicha yozilgan bo'lib, u orqali chiziqlarning qutb koordinatalaridagi ifodasi hosil bo'ladi. Ushbu tenglama ko'rinishidagi tahlil quyidagilarga olib keladi:

1. Qutb tenglamaning kvadratikligi: Bu tenglama r bo'yicha kvadratik bo'lgani sababli, u konik kesimlar sinfiga tegishli chiziqlarni ifodalaydi. Ya'ni:

$$r^2 P(\theta) + r Q(\theta) + F = 0$$

bu ko'rinish har doim biror ikkinchi tartibli chiziqqa mos keladi.

2. Sinflanish (konik kesimlar bo'yicha): Dekart koordinatalarida bo'lgani kabi, chiziqlarning turi quyidagi diskriminant orqali aniqlanadi:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Agar:

$\Delta < 0$ bo'lsa — bu aylana yoki ellips,

$\Delta = 0$ bo'lsa — bu parabola,

$\Delta > 0$ bo'lsa — bu giperbola.

Ushbu qoidalarining qutb koordinatalaridagi ko'rinishi ham shunday tahlil qilinadi, faqat bu yerda (θ) va $Q(\theta)$ funksiyalarining xususiyatlariga e'tibor beriladi.

3. Qutb koordinatalaridagi maxsus holatlar:

Agar fokus koordinatalar boshi (qutb)da joylashgan bo'lsa, quyidagi klassik qutb tenglamalari olinadi:

Parabola: $r = \frac{l}{1 + \cos \theta}$

Ellips (eksentrisitet $e < 1$): $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$

Giperbola (eksentrisitet $e > 1$): $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$

Bu tenglamalar konik chiziqlarning fokusli (direktrisa orqali aniqlanuvchi) qutb ifodalaridir va ularning umumiy ko'rinishi:

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

ko'rinishidadir, bu yerda e — eksentrisitet, d — fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofa.

Misol: Quyidagi tenglama berilgan: $r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$

Bu tenglama qutb koordinatalarida berilgan va konik kesimni ifodalaydi. Biz undan chiziq turini aniqlash va asosiy xossalarini tahlil qilamiz.

Yechish va tahlil: bu tenglama quyidagi umumiy ko'rinishga juda o'xshaydi:

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

Bu — konik kesimning fokusli ifodasi, bu yerda: e — eksentrisitet (shaklni aniqlaydi), d — fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofa.

Tenglamani ushbu ko'rinish bilan solishtiramiz:

$$r = \frac{2}{1 + \cos \theta} \rightarrow ed = 2, e = 1 \rightarrow d = 2$$

Shunday qilib: $e=1 \Rightarrow$ bu parabola. Fokus qutbda joylashgan, direktrisa esa $x=-2$ (chunki $+\cos \theta$ bo'lgani uchun direktrisa chiziq $x=-d$). Bu parabola o'q bo'ylab o'ng tomonga qaragan bo'ladi (chunki $+\cos \theta$ ishlatilgan).

Xulosa. Ikkinchi tartibli chiziqlar analitik geometriyaning asosiy obyektlaridan bo'lib, ularning tahlili odatda Dekart koordinatalar tizimida olib boriladi. Biroq, ayrim holatlarda — ayniqsa markaz yoki fokus atrofida simmetriya mavjud bo'lganda — qutb koordinatalarida tahlil qilish ancha qulay va samarali bo'ladi. Ushbu maqolada ko'rib chiqilganidek, ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasini qutb koordinatalariga o'tkazish orqali ularni algebraik va trigonometrik ifodalar yordamida tasvirlash mumkin.

Tenglamaning kvadratik tuzilmasi orqali chiziqning turi (aylana, ellips, parabola yoki giperbola) aniqlanadi va bu sinflanish koeffitsientlar orasidagi munosabat, ayniqsa diskriminant qiymati yordamida amalga oshiriladi. Shuningdek, fokusli ifodalar orqali ham konik kesimlarning qutb ko'rinishlari sodda va tushunarli ifodalanadi.

Qutb koordinatalarida tahlil qilish, ayniqsa fizikadagi markaziy kuchlar muammolari, orbitallarning shakli, optikada linzalar va egriliklar tadqiqotida keng qo'llaniladi. Demak, bu mavzuni chuqur o'rganish nafaqat matematik bilimlarni mustahkamlash, balki ularni amaliy sohalarda qo'llash imkonini ham beradi.

References:

Используемая литература:

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. T.A. Тошматов, М.Ю. Юнусов. Аналитик геометрия. – Toshkent: O'zbekiston Milliy universiteti nashriyoti, 2018.
2. Ж. Базаров. Геометрия ва chiziqli algebra. – Toshkent: Fan va texnologiya, 2017.
3. A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Lavrentyev. Matematika: Entsiklopedik lug'at. – Toshkent: O'qituvchi, 2001.
4. H. Anton, C. Rorres. Elementary Linear Algebra with Applications. – Wiley, 11th Edition, 2014.
5. Thomas, G.B., Finney, R.L. Calculus and Analytic Geometry. – Addison-Wesley, 9th Edition, 1996.
6. Stewart, J. Multivariable Calculus: Early Transcendentals. – Cengage Learning, 8th Edition, 2015.
7. Khan Academy, Conic Sections in Polar Coordinates. <https://www.khanacademy.org>