

FAZODA CHIZIQ VA TEKISLIK KESISHISHINING UMUMIY ANALITIK MODEL

Olimova Moxinur O'tkirjon qizi

Matematika yo'nalishi 1- kurs talabasi

Ilmiy maslahatchi: Maxmudova Dilnoza Xaytmirzaevna

Matematika kafedrası katta o'qituvchisi

Namangan davlat universiteti, O'zbekiston

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17656696>

Annotatsiya: Ushbu maqolada fazoviy chiziq va tekislik o'rtasidagi kesishish jarayonini aniqlashning umumiy analitik modeli ishlab chiqildi. Taklif etilgan yondashuv vektorlar, skalyar ko'paytmalar, aralash ko'paytmalar va determinantlar orqali chiziq parametrining aniq topilishini ta'minlaydi. Kesishish parametrining invariant shaklda ifodalanishi modelning affinning o'zgarishlariga nisbatan barqarorligini oshiradi. Tadqiqot jarayonida mualliflik teoremasi isbotlandi: chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasi chiziq boshlang'ich nuqtasining tekislik normaliga proyeksiyasi orqali aniqlanadi. Natijalar 3D grafika, robototexnika, geodeziya, optika, fizik modellashirish va kosmik navigatsiyada qo'llanilishi mumkin bo'lgan yuqori aniqlikdagi hisoblash modelini yaratdi.

Kalit so'zlar: chiziq, tekislik, kesishish nuqtasi, vektor algebra, skalyar ko'paytma, aralash ko'paytma, determinant, invariant model, analitik geometriya, fazoviy tahlil.

ОБЩАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация: В данной статье разработана общая аналитическая модель определения точки пересечения прямой и плоскости в трёхмерном пространстве. Предложенный подход основан на использовании векторов, скалярного и смешанного произведений, а также детерминантов, что позволяет точно вычислить параметр пересечения. Инвариантное представление параметра повышает устойчивость модели к аффинным преобразованиям. В ходе исследования была доказана авторская теорема: точка пересечения определяется как проекция начальной точки прямой на нормаль плоскости. Полученные результаты могут быть применены в 3D-графике, робототехнике, геодезии, оптике, физических моделях и навигации космических аппаратов.

Ключевые слова: прямая, плоскость, точка пересечения, векторная алгебра, скалярное произведение, смешанное произведение, детерминант, инвариантная модель, аналитическая геометрия, пространственный анализ.

A GENERAL ANALYTICAL MODEL FOR LINE-PLANE INTERSECTION IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Abstract: This article develops a general analytical model for determining the intersection point between a line and a plane in three-dimensional space. The proposed method utilizes vector algebra, scalar and mixed products, and determinant-based formulations to compute the intersection parameter with high precision. The invariant representation of the parameter increases the model's stability under affine transformations. During the study, an original theorem was proven: the intersection point is obtained as the projection of the line's

initial point onto the normal vector of the plane. The results offer a highly accurate computational framework applicable to 3D graphics, robotics, geodesy, optics, physical simulations, and spacecraft navigation.

Keywords: line, plane, intersection point, vector algebra, scalar product, mixed product, determinant, invariant model, analytic geometry, spatial analysis.

Kirish

Fazoda chiziq va tekislikning kesishish masalasi analitik geometriyaning eng fundamental va eng ko'p qo'llaniladigan bo'limlaridan biridir. U nafaqat nazariy matematikaning o'zida, balki kompyuter grafika, robototexnika, optika, muhandislik konstruksiyalari, uch o'lchamli modellashtirish, fizik jarayonlarni to'qnashuvlar orqali simulyatsiya qilish, aerokosmik navigatsiya kabi zamonaviy sohalarida asosiy matematik vosita sifatida qo'llaniladi. Chiziqning tekislik bilan qanday munosabatda bo'lishi — kesishi, tekislikka parallel bo'lishi yoki butunlay tekislik sirtida yotishi — fazoviy obyektlar orasidagi relyasion aloqalarni aniqlashda hal qiluvchi ahamiyat kasb etadi. Akademik manbalarda ushbu munosabatlar alohida-alohida mezonlar orqali izohlangan bo'lsa-da, ularning barchasini yagona invariant matematik model orqali birlashtirish nazariyani ham, amaliyotlarni ham sezilarli yengillashtiradi.

Zamonaviy matematikada fazodagi chiziq parametrik ko'rinishda ifodalanadi:

$$L: x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct, t \in \mathbb{R},$$

bu esa chiziqqa mos yo'nalish vektori

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

ni beradi. Tekislik esa umumiy ko'rinishda:

$$\Pi: Ax + By + Cz + D = 0,$$

normal vektori esa

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

bo'ladi.

Agar $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$ bo'lsa, chiziq tekislikni yagona nuqtada kesadi; aks holda u parallel yoki tekislikda yotadi. Biroq bu yondashuv ehtiyoj uchun yetarli bo'lsa-da, masalaning chuqur mohiyatini, invariant tabiatini va kompyuter modellariga moslanishini to'liq yoritib bermaydi. Aksincha, fazoviy tahlilning haqiqiy qudrati determinantlar, vektor proyeksiyalari, chiziqli mustaqillik shartlari va aralash ko'paytma kabi jinsiy konstruksiyalar orqali aniqlanadi.

Shuning uchun ushbu tadqiqotning asosiy maqsadi — chiziq va tekislik o'zaro holatini yagona matematik invariantlar asosida izchil, universal, koordinata tizimiga bog'liq bo'lmagan holda tavsiflash, ularning kesishish nuqtasini esa umumiy formula orqali aniqlashdir. Shuningdek, modelni kompyuter grafikasi va fizik modellashtirishga moslashtirish, ya'ni algoritmik shaklga keltirish ham tadqiqotning muhim tarkibiy qismidir.

Metodologiya

Metod bosqichlari chiziq va tekislik o'zaro munosabatini umumiy invariant modelga tushirishga asoslanadi. Avval chiziq parametrik tenglamasi tekislik tenglamasiga qo'yildi:

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0.$$

Bu tenglama tga nisbatan chiziqli ko'rinishga ega:

$$t(Aa + Bb + Cc) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0.$$

Bu yerda

$$Aa + Bb + Cc = \vec{v} \cdot \vec{n}$$

ekanligi aniqlanadi. Natijada kesishish sharti:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0.$$

Bu shart bajarilganda:

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\vec{v} \cdot \vec{n}}.$$

Kesishish koordinatalari:

$$P = (x_0 + at_0, y_0 + bt_0, z_0 + ct_0).$$

Parallelizm va yotish holatlarini aniqlash uchun determinant mezon kiritildi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Bu determinant ikki vektorning chiziqli bog'liqligini bildiradi, ya'ni yo'nalish vektori normal vektor bilan bir tekislikda joylashadi.

Agar:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

bo'lsa, chiziq tekislikda yotadi; agar bu ifoda nolga teng bo'lmasa, chiziq faqat parallel bo'ladi.

Ushbu metodning ahamiyatli tomoni — barcha tahlil vektorial qonunlarga asoslanganligi sababli, model koordinata o'zgarishlariga nisbatan invariant bo'lib qoladi. Bundan tashqari, algoritmik struktura nafaqat matematik tahlil, balki real kompyuter tizimlariga implementatsiya uchun ham juda mos.

Natija

Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatadiki, chiziq va tekislikning fazodagi o'zaro munosabatini aniqlash uchun tuzilgan umumiy analitik model nafaqat matematik nuqtai nazardan, balki amaliy hisoblashlar nuqtai nazaridan ham ancha takomillashgan va barqaror yondashuvni taqdim etadi. Aytilganidek, kesishish parametrining topilish formulasi:

$$t_0 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\vec{v} \cdot \vec{n}},$$

chiziqning boshlang'ich nuqtasi bilan tekislik orasidagi normal masofa va chiziq yo'nalishining tekislikka moyilligini hisobga oladi. Ushbu parametrning algebraik tuzilishi fazoda ikki obyektning uchrashish jarayonini aniq aks ettiradi: ya'ni, tekislikdan chiziq bo'ylab qancha "siljish" sodir bo'lishi kerakligini ifodalaydi. Modellash jarayonida chiziqning tekislikka "kirish tezligi" aynan

$\vec{v} \cdot \vec{n}$ qiymati bilan belgilanadi.

Kesishish nuqtasining koordinatalari:

$$P = (x_0 + at_0, y_0 + bt_0, z_0 + ct_0),$$

faqat bir emas, balki bir nechta talqinlarga ega:
 — geometrik talqinda bu nuqta chiziqning tekislikka eng "yaqinlashgan" nuqtasidir;
 — fizik talqinda chiziq bo'ylab harakatlanayotgan zarrachaning tekislikka to'qnashuvchi nuqtasi hisoblanadi;

— algoritmik talqinda esa bu nuqta chiziqning tekislik bilan bo'ladigan "birinchi kesishish" punkti sifatida qoraladi (xususan, ray tracingda).

Tadqiqot davomida parallelizm holatlari ham chuqur tahlil qilindi. Agar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0,$$

bo'lsa, chiziq tekislikka perpendikulyar bo'lmagan, ya'ni yo'nalish tekislikda yotuvchi vektordir. Shunda tekislikdan chiziqqa bo'lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ko‘rinishda bo‘lib, agar $d = 0$ bo‘lsa — chiziqli tekislikda yotadi.

Teorema: *Chiziqli tekislikni kesishish nuqtasi chiziqli boshlang‘ich nuqtasi $L(0)$ ning tekislik normal vektori bo‘yicha aralash invariant orqali o‘lchanadigan proyeksiyasi orqali aniqlanadi. Ya‘ni kesishish nuqtasi quyidagi invariant formula bilan topiladi:*

$$P = L(0) - \frac{\langle \vec{n}, L(0) \rangle + D}{\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle} \vec{v}.$$

Bu formula kesishish nuqtasining vektorial tuzilishini yoritib, chiziqli tekislikka qanday “kirib borishi”ni sof invariant ko‘rinishda ifodalaydi.

Teoremaning isboti davomida aralash ko‘paytma, skalyar proyeksiyalar va tekislikka masofa munosabati o‘zaro uyg‘unlashtirildi. Bu natija fazoviy tahlilning intuitiv emas, balki struktural asosga tayanishini ta‘minladi.

Muhokama

Natijalarni tahlil qilish jarayonida chiziqli va tekislikning kesishishini modellash ko‘p funksiyali nazariy va amaliy jihatlariga ega ekanligi aniqlandi. Avvalo, vektorial invariantlarga asoslangan yondashuv modelni barcha affinning o‘zgarishlarida (aylantirish, siljitish, cho‘zish, burish) o‘zgarmay turadigan barqaror formalizmga aylantirdi. Bu, o‘z navbatida, geometriyani konkret koordinatalar tizimiga bog‘liq bo‘lmagan holga keltiradi. Shunday qilib, model nafaqat matematik shakl sifatida, balki har qanday 3D tizimning “koordinatadan mustaqil” ishlovchi yadrosi bo‘lib xizmat qila oladi.

Kompyuter grafikasi nuqtai nazaridan ko‘rib chiqilganda, taklif etilgan yondashuv nur-tekislik kesishishini aniqlashda asosiy rol o‘ynaydi. 3D vizualizatsiyada har bir nur sirtlar bilan to‘qnashganda sahna yoritilishi, soylari, yaltirash darajasi, shaffoflik kabi effektlar hisoblanadi. Demak, kesishish formulasi grafik tizimning fizik realistik darajasini belgilaydi.

Robototexnikada manipulyatorning uch bo‘g‘ini to‘siq bilan kesishadimi yoki yo‘qmi, yo‘l rejalashtirish jarayoni davomida to‘qnashuv ehtimoli aynan chiziqli-tekislik modeli orqali baholanadi. Masalan, robot qo‘lining harakat chizig‘i poligon tekisliklari bilan kesishsa, to‘qnashuv yuzaga keladi.

Geodeziya va aerokosmik modellashtirishda UAV yoki raketaning yo‘nalish chizig‘i relyef tekisliklari bilan kesishish nuqtasini aniqlash orqali balandlik, xavfsiz masofa va trayektoriya optimallashtiriladi.

Muhokama davomida aniqlangan yana bir jihat — determinant yondashuvi modellarni sonli xatolarga nisbatan sezgirlikdan himoya qiladi. Zero, determinant qiymatining nolga yaqinlashishi parallelizmni aniq aniqlashga yordam beradi. Bundan tashqari, chiziqli-tekislik kesishishining chiziqli bo‘lmagan holatlarga umumlashtirilishi (masalan, egrilar va sirtlar) aynan shu yondashuvga asoslanadi.

Shu bois, tadqiqotda ishlab chiqilgan model nafaqat mavjud geometriya bilimlarini mustahkamlaydi, balki zamonaviy hisoblash texnologiyalari uchun mustahkam matematik platforma yaratadi.

Xulosa

Ushbu tadqiqot orqali fazodagi chiziqli va tekislikning o‘zaro munosabatini to‘liq tavsiflaydigan universal analitik model yaratildi. Modelning invariantligi, algoritmik soddaligi, geometrik aniq talqini, fizik ma’noga egaligi va kompyuter tizimlariga moslashuvchanligi uni zamonaviy ilm-fan va texnologiyalarning muhim matematik vositasiga aylantiradi. Kesishish

parametrining topilish formulasi nafaqat oddiy algebraik yechim, balki chuqur invariant proyeksiya mexanizmini aks ettirishi, geometriyani yanada konseptual shaklga keltirdi.

Tadqiqot davomida isbotlangan teorema chiziq–tekislik kesishishining yangi invariant interpretatsiyasini berdi. Bu teorema chiziqning tekislikka kirish jarayonini strukturaviy jihatdan ko'rsatib, fazoviy tahlilga yangi nazariy imkoniyatlar yaratdi.

Mazkur tadqiqot natijalari kelgusida sirtlar, egrilar, ko'p tekislikli tuzilmalar bilan kesishish, fazoviy optimallashtirish, yo'l rejalashtirish, sirtlarni rekonstruksiya qilish kabi murakkab masalalarning yechimlarini ham yanada boyitishi mumkin. Shu tariqa, yaratilgan model chiziq–tekislik kesishishining hozirgi darajadan yuqoriroq, konseptual bosqichga ko'tarilishiga hissa qo'shadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Anton H., Rorres C. *Elementary Linear Algebra with Applications*. -New York: John Wiley & Sons, 2014.
2. Bronshtein I.N., Semendyayev K.A. *Mathematics Handbook for Scientists and Engineers*. — Berlin: Springer, 2016
3. Dilnoza, M. Use of the Acmelological Approach to Teaching Mathematics. *International Journal of Innovative Analyses and Emerging Technology*. c-ISSN, 2792-4025.
4. Abduraxmonova, R., & Mahmudova, D. (2025). Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 74–78).
5. Abdulhayeva, G., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularni amaliyotga tadbiqu. B theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences (T. 4, Выпуск 7, cc. 35–40).
6. Karimberdiyeva, D., & Mahmudova, D. (2025). Tekislikdagi perspektiv-affin moslikning o'ziga xos xususiyatlari. *Развитие педагогических технологий в современных науках*, 4(3), 114–117.
7. Ismoilova D., & Mahmudova, D. (2025). Ko'p o'lchovli yevklid fazosi: o'qitish texnologiyasi asosida yondashuv. *Innov. Conf.* Published online April 17, 2025:1-7. Accessed April 18, 2025.
8. Mamatkadirova Zebo Tohirjon qizi, & Dilnoza Xaytmirzayevna Maxmudova. (2025). Constructing an ellipse using conjugate diameters and its applications. *International Scientific and Current Research Conferences*, 1(01), 48–55