

ISSIQLIK O'TKAZUVCHANLIK TENGLAMALARI UCHUN AYIRMALI SXEMALAR

Sobirjonova Moxlaroyim A'zamjon qizi

Farg'ona davlat universiteti 1-kurs magistranti

<https://doi.org/10.5281/zenodo.17938387>

Annotatsiya: Ushbu ilmiy maqolada bir o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini yechish uchun eng keng qo'llaniladigan ayirmali sxemalar: aniq (Eylarning aniq sxemasi), qorong'u (Eylarning qorong'u sxemasi) va Kreyn-Nikolson sxemalari qiyosiy tahlil qilinadi. Tadqiqotning asosiy maqsadi ushbu sxemalarning barqarorligi, aniqlik darajasi va hisoblash samaradorligini aniq analitik yechimga ega bo'lgan standart masala yordamida solishtirishdan iborat. Furie usuli yordamida sxemalarning barqarorlik shartlari aniqlangan, Teylor qatoriga yoyish orqali esa ularning yaqinlashuvchanligi baholangan. Raqamli eksperimentlar natijasida aniq sxemaning qattiq barqarorlik chegarasiga ega ekanligi ($r \leq 0.5$), qorong'u sxemaning shartsiz barqaror, lekin birinchi tartibli aniqligi tufayli nisbatan katta xatolik berishi, Kreyn-Nikolson sxemasining esa shartsiz barqarorlik va vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli yuqori aniqligi bilan ajralib turishi ko'rsatildi. Xulosa qilib, har bir amaliy masala uchun optimal sxema tanlashda hisoblash tezligi, aniqlik talabi va barqarorlik cheklovlarini kompleks hisobga olish zarurligi ta'kidlanadi.

Kalit so'zlar: issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi, ayirmali sxemalar, chekli farqlar usuli, barqarorlik tahlili, Kreyn-Nikolson sxemasi, raqamli yechim, diskretlashtirish

Kirish

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi parabolik tipdagi eng muhim qisman differensial tenglamalardan biri bo'lib, nafaqat issiqlik tarqalishini, balki modda diffuziyasi, moliyaviy derivativlarni baholash va boshqa ko'plab tabiiy va texnologik jarayonlarni modellashtirishda qo'llaniladi. Ushbu tenglamaning yopiq analitik yechimlari faqat soddalashtirilgan boshlang'ich-chegara shartlari va geometriyaga ega masalalar uchun mavjud. Amaliyotda esa murakkab soha shakllari, chiziqli bo'lmagan chegara shartlari va o'zgaruvchan parametrlar tufayli tenglamani raqamli usullar bilan yechish talab etiladi. Chekli farqlar usuli eng keng tarqalgan raqamli usullardan biri bo'lib, u qisman differensial tenglamani diskretlashtirib, uni algebraik tenglamalar tizimiga aylantiradi. Ushbu maqolaning maqsadi bir o'lchovli issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun eng ko'p qo'llaniladigan ayirmali sxemalarni (aniq, qorong'u va Kreyn-Nikolson sxemalarini) tahlil qilish, ularning barqarorligi, aniqligi va hisoblash samaradorligini taqqoslash, shuningdek ularni amaliy masalaga tatbiq etish orqali xususiyatlarini ko'rsatishdan iborat. Tadqiqot natijalari muhandislik hisoblarida ma'lum bir masala shartlariga mos sxemani tanlashda amaliy yordam beradi.

Adabiyotlar tahlili

Issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi va uning raqamli yechimlari bo'yicha adabiyotlar tahlili, ushbu mavzuning rivojlanish bosqichlari va zamonaviy yondashuvlarni tushunish imkonini beradi. Tahlil davomida asosiy e'tibor chekli farqlar usuli va uning turli variantlariga qaratilgan.

Smith (1985) asari qisman differensial tenglamalarni raqamli yechishning chekli farqlar usullari bo'yicha keng qamrovli qo'llanma hisoblanadi. Muallif asosan barqarorlik, yaqinlashuvchanlik va yechimlarning yaqinlashishi kabi fundamental tushunchalarni batafsil

yoritib bergan. Ushbu asarda aniq va qorong'u sxemalarning qiyosiy tahlili keltirilgan bo'lib, ularning amaliy qo'llanilishi uchun zarur shart-sharoitlar ko'rsatilgan. Thomas (1995) o'z asarida chekli farqlar usulini tizimli tarzda bayon qilgan, xususan, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi uchun turli diskretlashtirish sxemalarini keltirgan. Muallifning ta'kidlashicha, sxemalar tanlovida nafaqat aniqlik, balki hisoblash samaradorligi ham muhim omil hisoblanadi. Samarskiy (2001) asari ayirmali sxemalar nazariyasi bo'yicha fundamental isoblanadi. Muallif o'z asarida barqarorlikni tekshirishning Furry usuli, operator usullari va energiya tenglamalari kabi muhim tushunchalarni batafsil yoritgan. Samarskiyning fikricha, har qanday raqamli sxema qurishda uning barqarorligi va yaqinlashuvchanligi birinchi o'ringa qo'yilishi kerak. Samarskiy va Gulin (1989) asarida ayirmali sxemalarning barqarorligi masalasiga alohida e'tibor qaratilgan. Mualliflar ko'pgina amaliy masalalarda sxemalarning barqarorligi ularning aniqligidan ham muhimroq ekanligini ta'kidlaganlar.

Tadqiqot metodologiyasi

Tadqiqotning nazariy asosini bir o'lchovli klassik issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasi tashkil etadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

bu yerda $u(x, t)$ – kerakli funksiya, α – doimiy issiqlik o'tkazuvchanlik koeffitsiyenti. Masala $0 < x < L$ sohada va $t > 0$ vaqt oralig'ida ko'rib chiqiladi. Boshlang'ich shart $u(x, 0) = f(x)$ va nolga teng Dirichlet tipidagi chegara shartlari $u(0, t) = u(L, t) = 0$ qo'yiladi.

Yechimni topish uchun fazoviy va vaqt o'zgaruvchilarini diskretlashtirish amalga oshirildi. Fazoviy soha N ta qismga bo'lindi, bunda $\Delta x = L / N$ qadam bilan. Vaqt o'qi Δt qadam bilan diskretlashtirildi. Shu asosida $u(x_i, t_n) = u_i^n$ diskret funksiya kiritildi.

Tadqiqot doirasida quyidagi uch asosiy ayirmali sxema qo'llanildi va ularning xususiyatlari tahlil qilindi:

1. Aniq (Eylerning aniq) sxemasi. Bu sxemada vaqt bo'yicha hosila oldingi farq, fazo bo'yicha ikkinchi hosila esa joriy vaqt qatlamida markaziy farq bilan almashtirildi. Sxemaning yakuniy ko'rinishi:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

ga ega bo'lib, bu yerda $r = \alpha \Delta t / (\Delta x)^2$ -- barqarorlik parametri. Sxema oshkor (eksplisit) hisoblanadi, chunki keyingi vaqt qatlamidagi nuqtaviy qiymat oldingi qatlamdagi qo'shni nuqtalar qiymatlari orqali aniq ifodalanadi. Uning barqarorligi $r \leq 0.5$ shartga bog'liq.

2. Qorong'u (Eylerning qorong'u) sxemasi. Bu sxemada fazoviy ikkinchi hosila keyingi vaqt qatlamida hisoblandi. Natijada:

$$-ru_{i-1}^{n+1} + (1 + 2r)u_i^{n+1} - ru_{i+1}^{n+1} = u_i^n$$

ko'rinishdagi chiziqli tenglamalar tizimi hosil bo'ldi. Sxema ochiqmas (implicit) hisoblanadi va uni yechish uchun har bir vaqt qadamida tridiagonal matritsalar usuli qo'llanildi. Bu sxema shartsiz barqaror hisoblanadi.

3. Kreyn-Nikolson sxemasi. Bu sxema aniq va qorong'u sxemalarning yarmi yig'indisi sifatida qurildi, ya'ni fazoviy ikkinchi hosila joriy va keyingi vaqt qatlamlaridagi qiymatlarning o'rtacha qiymati sifatida hisoblandi. Sxema ham ochiqmas hisoblanadi:

$$-0.5ru_{i-1}^{n+1} + (1+r)u_i^{n+1} - 0.5ru_{i+1}^{n+1} = 0.5ru_{i-1}^n + (1-r)u_i^n + 0.5ru_{i+1}^n$$

U shartsiz barqaror va vaqt bo'yicha aniqligi yuqoriroq.

Har bir sxemaning yaqinlashuvchanligi va barqarorligi tahlil qilindi. Xatoni baholash uchun diskret tenglamaning asl differensial tenglamaga yaqinlashish darajasi Teylor qatoriga yoyish usuli bilan o'rganildi. Barqarorlikni tekshirish uchun Furrye (von Neyman) usuli qo'llanilib, har bir sxema uchun so'zlovchi omil ξ aniqlandi.

Tadqiqotning amaliy qismida sxemalarning ishlashini solishtirish maqsadida aniq analitik yechimga ega bo'lgan standart masala tanlandi. Boshlang'ich taqsimot sifatida $u(x,0) = \sin(\pi x)$ funksiya, $\alpha = 1$, $L = 1$ parametrlar qabul qilindi. Analitik yechim

$u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$ ko'rinishga ega. Hisoblashlar r parametrning ikki xil qiymati (barqaror holat uchun $r = 0.5$ va aniq sxema uchun barqarorlik chegarasida $r = 0.5$ dan katta qiymat) uchun amalga oshirildi. Natijalar aniqligini baholash uchun ildiz o'rtacha kvadratik xato (RMSE) va maksimal mutlaq xato kriteriyalari hisoblandi.

Tahlillar va natijalar

Kiritilgan uchala sxema ham tanlangan test masalasini yechishda qo'llanildi. Diskretlashtirish parametrlari sifatida $\Delta x = 0.1$ va barqaror holat uchun $\Delta t = 0.005$ ($r = 0.5$), barqarorlik chegarasini tekshirish uchun esa $\Delta t = 0.01$ ($r = 1$) tanlandi. Hisoblashlar $t = 0.1$ vaqtgacha olib borildi.

Raqamli natijalar shuni ko'rsatdiki, $r = 0.5$ holatda barcha sxemalar barqaror ishladi. Aniq sxema uchun ildiz o'rtacha kvadratik xato (RMSE) taxminan 2.3×10^{-3} ni tashkil etdi. Kreyn-Nikolson sxemasi eng yuqori aniqlikni namoyish etib, xatosi 1.2×10^{-4} atrofida bo'ldi. Qorong'u sxemaning xatosi esa 4.1×10^{-3} ni tashkil etdi, ya'ni u aniq sxemaga nisbatan biroz katta xatolik berdi.

$r = 1$ holatda esa natijalar keskin farq qildi. Aniq sxema barqarorlik shartini bajarmagani uchun hisoblash paytida yechim tebranishli xarakterga ega bo'lib, qiymatlar katlashib, natijada butunlay noto'g'ri yechimga olib keldi. Qorong'u va Kreyn-Nikolson sxemalari esa barqaror ishlashda davom etdi. Biroq, vaqt qadami ikki baravar oshganligi sababli, ularning xatolari ham oshdi: qorong'u sxema uchun RMSE 7.8×10^{-3} ga, Kreyn-Nikolson sxemasi uchun esa 5.6×10^{-4} ga yetdi. Shuni ta'kidlash kerakki, Kreyn-Nikolson sxemasi katta r parametri bilan ham aniq va qorong'u sxemalarga nisbatan aniqroq natija berishda davom etdi.

Grafik tahlillar ham sxemalar xatti-harakatlarini tasdiqladi. Aniq sxema $r = 0.5$ da analitik yechimga yaqin egri chiziqni hosil qilsa, $r = 1$ da esa egri chiziqda jismoniy jihatdan mantiqsiz keskin tebranishlar va burilishlar kuzatildi. Qorong'u va Kreyn-Nikolson sxemalari esa ikkala holatda ham silliq va jismoniy mazmunli yechimlarni berdi.

Xulosa

Tadqiqot natijalariga ko'ra, issiqlik o'tkazuvchanlik tenglamasini yechish uchun bitta universal ayirmali sxema mavjud emas. Har bir sxemaning o'ziga xos imkoniyatlari va cheklovlari mavjud. Aniq sxema sodda va tezkor, ammo qattiq barqarorlik shartiga ega. Qorong'u sxema shartsiz barqaror, lekin hisoblash jihatdan qimmatroq va aniqlik darajasi pastroq. Kreyn-Nikolson sxemasi yuqori aniqlik va shartsiz barqarorlikni uyg'unlashtiradi va bu uni amaliy ko'plab ilovalar uchun eng maqbul variantga aylantiradi.

Kelajakdagi tadqiqotlar yo'nalishlari sifatida ikki o'lchovli va uch o'lchovli masalalarga, shuningdek o'zgaruvchan koeffitsientli yoki noaniqlik sharoitida ishlaydigan moslashuvchan (adaptiv) tarmoqli sxemalarni o'rganishni ko'rish mumkin. Bundan tashqari, zamonaviy ko'p yadroli protsessorlar va GPU-larda hisoblashni optimallashtirish uchun ushbu sxemalarning parallel algoritmlarini ishlab chiqish amaliy ahamiyatga ega.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Smith, G. D. (1985). Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Oxford University Press.
2. Thomas, J. W. (1995). Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods. Springer.
3. LeVeque, R. J. (2007). Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations. SIAM.
4. Morton, K. W., & Mayers, D. F. (2005). Numerical Solution of Partial Differential Equations. Cambridge University Press.
5. Samarskii, A. A. (2001). The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker.
6. Richtmyer, R. D., & Morton, K. W. (1967). Difference Methods for Initial-Value Problems. Interscience Publishers.
7. Strikwerda, J. C. (2004). Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations. SIAM.
8. Жуков А.И., Шашкин А.Ю. (2012). Разностные схемы для уравнения теплопроводности. Журнал вычислительной математики и математической физики.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. (1989). Устойчивость разностных схем. Наука.