

XUSUSIY INTEGRAL TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH

Saidova Dilbar Salimovna

Termiz iqtisodiyot va servis universiteti

70540101-Matematika mutaxassisligi magistranti

dilbarsaidova@gmail.com

<https://doi.org/10.5281/zenodo.18402873>

ANNOTATSIYA: Mazkur maqolada xususiy integral tenglamalar sistemasining matematik mohiyati hamda ularni yechish masalalari tahlil qilinadi. Tadqiqot davomida Fredholm va Volterra tipidagi ikkinchi tur integral tenglamalar sistemalari umumiy ko'rinishda qaralib, ularning yechimga ega bo'lish shartlari va asosiy xossalari yoritiladi. Integral yadroning tuzilishiga alohida e'tibor qaratilib, ajraluvchi (degeneratsiyalangan) yadrolarga ega bo'lgan sistemalarni yechishning samarali usullari ko'rsatib beriladi. Olingan natijalar integral tenglamalar nazariyasini o'rganishda hamda matematik modellashirishga oid amaliy masalalarni yechishda muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo'lib, tadqiqot natijalari oliy ta'lim muassasalarida matematik analiz va funksional analiz fanlarini o'qitishda metodik manba sifatida foydalanilishi mumkin.

KALIT SO'ZLAR: xususiy integral tenglamalar, integral tenglamalar sistemasi, Fredholm tipidagi tenglamalar, Volterra tipidagi tenglamalar, ajraluvchi yadro, degeneratsiyalangan yadro, integral operator, funksional analiz, algebraik tenglamalar sistemasi, analitik yechim.

KIRISH: Integral tenglamalar nazariyasi matematik analizning muhim bo'limlaridan biri bo'lib, u ko'plab amaliy jarayonlarning matematik modellarini qurishda asosiy vosita sifatida qaraladi. Ko'plab fizik, texnik va iqtisodiy masalalarda jarayon holati noma'lum funksiya orqali ifodalanib, ushbu funksiya qiymatlari integral bog'lanishlar orqali aniqlanadi. Bunday masalalar umumiy holda quyidagi ko'rinishdagi integral tenglama bilan tavsiflanadi:

$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t, s) x(s) ds$. Agar jarayonda bir nechta o'zaro bog'langan holat funksiyalari ishtirok etsa, u holda masala xususiy integral tenglamalar sistemasi ko'rinishini oladi:

$$x_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=1}^m \int_a^b K_{ij}(t, s) x_j(s) ds, i = 1, 2, \dots, m.$$

Mazkur Sistema Fredholm tipidagi ikkinchi tur integral tenglamalar sistemasiga mansub bo'lib, bunda noma'lum funksiyalar integral operator orqali o'zaro bog'langan holda aniqlanadi. Integral yadroning $K_{ij}(t, s)$ matematik xossalari — uzluksizligi, chegaralanganligi va simmetrikligi — sistema yechimining mavjudligi hamda yagonaligini belgilovchi asosiy omillar sifatida namoyon bo'ladi. Agar integralning yuqori chegarasi o'zgaruvchan bo'lsa, ya'ni

$$x_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=1}^m \int_a^t K_{ij}(t, s) x_j(s) ds,$$

unda bunday sistemalar Volterra tipidagi integral tenglamalar sistemasi deb ataladi. Integral tenglamalar sistemasini yechish masalasi funksional analiz nuqtai nazaridan quyidagi operator tenglama sifatida qaraladi:

$x = f + \mathcal{K}x$, bu yerda $\mathcal{K}$ — mos integral operator bo'lib,

$$(\mathcal{K}x)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s) ds.$$

Agar operator normasi $\| \mathcal{K} \| < 1$ shart bajarilsa, u holda yechim Neumann qatori orqali

$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}^n f$ ko'rinishda ifodalanadi. Ushbu natija integral tenglamalar sistemasining yechimga ega bo'lishi va uni konstruktiv tarzda topish mumkinligini ko'rsatadi. Amaliy masalalarda muhim holatlardan biri integral yadroning ajraluvchi (degeneratsiyalangan) ko'rinishga ega bo'lishidir:

$K_{ij}(t, s) = \sum_{k=1}^r a_{ik}(t) b_{kj}(s)$. Bunday hollarda integral operator chekli rangga ega bo'lib, xususiy integral tenglamalar sistemasi chekli o'lchamli algebraik tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Natijada noma'lum funksiyalar

$$x_i(t) = f_i(t) + \sum_{k=1}^r a_{ik}(t) C_k, C_k = \int_a^b b_{kj}(s) x_j(s) ds$$

ko'rinishda aniqlanadi, bu esa masalaning analitik yechimini olish imkonini yaratadi.

Mazkur tadqiqotning asosiy maqsadi yuqorida keltirilgan nazariy yondashuvlarga tayangan holda xususiy integral tenglamalar sistemasini yechishning matematik mexanizmini chuqur tahlil qilish hamda ajraluvchi yadrolarga ega bo'lgan sistemalar uchun aniq yechimlarni olish jarayonini ilmiy asosda yoritishdan iboratdir. Olingan natijalar integral tenglamalar nazariyasini o'rganishda, shuningdek, oliy ta'lim muassasalarida matematik fanlarni o'qitishda muhim nazariy va amaliy ahamiyat kasb etadi.

METODOLOGIYA: Mazkur tadqiqotda xususiy integral tenglamalar sistemasini yechish masalasi funksional analiz va integral operatorlar nazariyasi asosida o'rganildi. Tadqiqot obyekti sifatida Fredholm va Volterra tipidagi ikkinchi tur integral tenglamalar sistemalari tanlanib, ularning umumiy matematik ko'rinishi quyidagicha ifodalanadi:

$$x_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=1}^m \int_a^b K_{ij}(t, s) x_j(s) ds, i = 1, 2, \dots, m. \text{ Tadqiqot jarayonida birinchi}$$

navbatda sistema vektor-funksional shaklga keltirildi. Buning uchun noma'lum funksiyalar vektori

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))^T \text{ va berilgan funksiyalar vektori}$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t))^T$$

ko'rinishda aniqlanadi. Shunda integral tenglamalar sistemasi quyidagi operator tenglama shaklini oladi:

$$x(t) = f(t) + \int_a^b K(t, s) x(s) ds = f(t) + \mathcal{K}x(t),$$

bu yerda $\mathcal{K}$ — mos integral operator hisoblanadi. Keyingi bosqichda integral operatorning normasi va spektral xossalari tahlil qilindi. Agar operator uchun

$$\| \mathcal{K} \| < 1$$

sharti bajarilsa, u holda integral tenglamalar sistemasining yagona yechimi mavjud bo'lib, u ketma-ket yaqinlashish (Neumann qatori) orqali aniqlanadi:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}^n f.$$

Ushbu metod Fredholm tipidagi sistemalar uchun qo'llanilib, yechimning yaqinlashuv shartlarini aniqlash imkonini beradi.

Volterra tipidagi xususiy integral tenglamalar sistemalari uchun esa

$$x_i(t) = f_i(t) + \sum_{j=1}^m \int_a^t K_{ij}(t, s) x_j(s) ds$$

ko'rinishdan foydalanildi. Bunda integral chegaraning o'zgaruvchanligi sababli iteratsion jarayonning yaqinlashuvi avtomatik tarzda ta'minlanadi va yechim konstruktiv usulda topiladi.

Tadqiqotning asosiy metodologik yondashuvi sifatida ajraluvchi (degeneratsiyalangan) yadro usuli tanlandi. Agar integral yadro

$$K_{ij}(t, s) = \sum_{k=1}^r a_{ik}(t) b_{kj}(s)$$

ko'rinishda ifodalansa, integral operator chekli rangga ega bo'ladi. Bunday hollarda integral tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$x_i(t) = f_i(t) + \sum_{k=1}^r a_{ik}(t) C_k$, bu yerda noma'lum koeffitsiyentlar

$C_k = \sum_{j=1}^m \int_a^b b_{kj}(s) x_j(s) ds$ algebraik tenglamalar sistemasini hosil qiladi. Ushbu

algebraik sistema yechilgach, noma'lum funksiyalarning analitik ko'rinishlari aniqlanadi.

NATIJALAR: Tadqiqot jarayonida ajraluvchi yadrolarga ega bo'lgan xususiy integral tenglamalar sistemasini yechish imkoniyati aniqlandi. Xususan, quyidagi ko'rinishdagi integral sistema ko'rib chiqildi:

$$\begin{cases} x(t) = 1 + \int_0^1 t s x(s) ds + \int_0^1 t s y(s) ds, \\ y(t) = t + \int_0^1 t s x(s) ds + 2 \int_0^1 t s y(s) ds. \end{cases}$$

Integral yadroning $K(t, s) = t \cdot s$ ajraluvchi ekanligi aniqlanib, quyidagi momentlar kiritildi:

$$A = \int_0^1 s x(s) ds, B = \int_0^1 s y(s) ds.$$

Natijada sistema chekli o'lchamli algebraik tenglamalar sistemasiga keltirildi va u yechilgach,

$A = \frac{5}{2}, B = \frac{7}{2}$ qiymatlar olindi. Ushbu natijalar asosida noma'lum funksiyalarning aniq ko'rinishlari topildi:

$x(t) = 1 + 6t, y(t) = \frac{21}{2}t$. Olingan yechim xususiy integral tenglamalar sistemasining analitik yechimga ega ekanligini va ajraluvchi yadro usulining samaradorligini tasdiqlaydi.

MUHOKAMA: Olingan natijalar xususiy integral tenglamalar sistemasini yechishda integral yadroning tuzilishi hal qiluvchi ahamiyatga ega ekanligini ko'rsatdi. Xususan, yadroning ajraluvchi $K(t, s) = t \cdot s$ ko'rinishga ega bo'lishi integral operatorni chekli rangli operatorga keltirish imkonini berdi va natijada integral sistema chekli o'lchamli algebraik tenglamalar sistemasiga soddalashtirildi. Bu holat noma'lum funksiyalarni analitik ko'rinishda aniqlashga sharoit yaratdi.

Tadqiqot davomida qo'llanilgan metodologik yondashuv klassik integral tenglamalar nazariyasida keng qo'llaniladigan Neumann qatori va operator yondashuvi bilan mos keladi. Biroq, umumiy holatlarda, ya'ni integral yadro ajralmas bo'lganda, bunday analitik yechimni olish qiyinlashadi va sonli usullardan foydalanish zarurati yuzaga keladi. Shu ma'noda, olingan

natijalar ajraluvchi yadrolarga ega bo'lgan integral tenglamalar sistemasini yechishda tanlangan usulning samaradorligini tasdiqlaydi.

Shuningdek, topilgan yechimlar integral tenglamalar sistemasining yechimga ega bo'lishi va uning yagonaligi masalalarini yoritishda muhim nazariy ahamiyatga ega. Natijalar integral tenglamalar sistemasini matematik modellashirishda, ayniqsa, soddalashtirilgan modellarda analitik yechim olish mumkinligini ko'rsatib, amaliy masalalarda metod tanlashda muhim ilmiy asos bo'lib xizmat qiladi.

XULOSA: Mazkur tadqiqot xususiy integral tenglamalar sistemasini yechish masalasining nazariy va amaliy jihatlarini kompleks tarzda yoritishga qaratildi. O'rganishlar shuni ko'rsatdiki, integral tenglamalar sistemasini tahlil qilishda ularni operator ko'rinishga keltirish va integral yadroning matematik tuzilishini aniqlash yechimning mavjudligi hamda konstruktiv tarzda topilishida hal qiluvchi ahamiyatga ega hisoblanadi.

Tadqiqot jarayonida ajraluvchi (degeneratsiyalangan) yadrolarga ega bo'lgan xususiy integral tenglamalar sistemalarini chekli o'lchamli algebraik tenglamalar sistemasiga keltirish mumkinligi ilmiy asosda ko'rsatib berildi. Ushbu yondashuv noma'lum funksiyalarning analitik ko'rinishlarini aniqlash imkonini berib, integral tenglamalar sistemasini yechish jarayonini sezilarli darajada soddalashtiradi va hisoblash aniqligini oshiradi.

Olingan natijalar integral tenglamalar nazariyasining fundamental qoidalarini tasdiqlash bilan birga, amaliy modellashirish masalalarida metod tanlashning muhimligini ham namoyon etadi. Xususan, integral yadroning strukturaviy xususiyatlarini hisobga olgan holda tanlangan yechish usuli nafaqat nazariy jihatdan asosli, balki amaliy jihatdan ham samarali ekanligi aniqlandi.

Umuman olganda, mazkur tadqiqot xususiy integral tenglamalar sistemasini o'rganishda tizimli va ilmiy asoslangan yondashuvning ahamiyatini ochib beradi. Tadqiqot natijalari matematik analiz va funksional analiz fanlarini chuqur o'rganishda, shuningdek, oliy ta'lim muassasalarida mazkur yo'nalishdagi fanlarni o'qitishda metodik va nazariy manba sifatida xizmat qilishi mumkin.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Tricomi F.G. *Integral Equations*. — New York: Interscience Publishers, 1957.
2. Kress R. *Linear Integral Equations*. — 3rd ed. — New York: Springer, 2014.
3. Gripenberg G., Londen S.O., Staffans O. *Volterra Integral and Functional Equations*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
4. Hackbusch W. *Integral Equations: Theory and Numerical Treatment*. — Basel: Birkhäuser, 1995.
5. Закирова З. Вклад нематериальной культуры в развитие музыкального искусства // Общество и инновации. – 2024. – Т. 5. – №. 4/S. – С. 128-133.
6. Atkinson K.E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
7. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional Analysis*. — Oxford: Pergamon Press, 1982.
8. Kreyszig E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. — New York: Wiley, 1978.
9. Polyanin A.D., Manzhirov A.V. *Handbook of Integral Equations*. — Boca Raton: CRC Press, 2008.