



HARBIY MASALALARNI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR ORQALI YECHISH

Israilov M.

O'R Harbiy xavfsizlik va mudofaa universiteti
professori, t.f.n., dotsent
<https://doi.org/10.5281/zenodo.17333462>

ARTICLE INFO

Qabul qilindi: 07-oktabr 2025 yil
Ma'qullandi: 10-oktabr 2025 yil
Nashr qilindi: 12-oktabr 2025 yil

KEYWORDS

differensial tenglama, integral doimiysi, boshlang'ich shart, parametrik tenglama, qarshilik kuchi, kinematic tenglama, qutb koordina tizimi, yuzalar integrali, markaziy kuch, sektor tezlik, kosmik tezlik.

ABSTRACT

Ushbu maqola harbiy masalalarni differensial tenglamalar orqali yechishga qaratilgan bo'lib, snaryadning harakati bo'yicha ikki xil shart asosidagi masalalar qarab chiqilgan.

Keyingi yillarda respublikamizda harbiy ishlarda ilmni va harbiy bilimni rivojlantirish masalasiga e'tibor kuchaymoqda. Mana shuning uchun ham harbiy ta'lim sohasida transformatsiya ishlari olib borilib, Harbiy xavfsizlik va mudofaa universiteti va unga qarashli ilmiy tadqiqot instituti va bir qator harbiy ta'lim institutlari, fakultetlar tashkil etildi. Ularda oliy harbiy ta'limning magistratura bosqichi va doktorantura bo'limlari qayta ko'rib chiqildi. Shu bilan birgalikda, kursantlarning ilmiy jamiyatlari ham qayta tashkil etildiki, bularning barchasi harbiy sohada ilmning rivojlanishiga xizmat qilmoqda. Buning barchasi harbiy ishlarga ilmiy nuqtai nazaridan qarashga, harbiy ilmiy kadrlarning yetishib chiqishiga hamda ilmiy salohiyatning ortib borishiga olib kelmoqda.

Ma'lumki, harbiy sohadagi ko'pgina masalalarning yechimida differensial tenglamalariga duch kelinadi. Ushbu maqola orqali ham kamina tomonidan ishlab chiqilgan ikkita harbiy tipdagi masalalarning differensial tenglamalar yordamida yechilishi e'lon qilinmoqda, zora ushbu kabi yondashuvlar harbiy kadrlarning ilm bilan shug'ullanishida yordam bersa.

Har ikkala masala snaryadning harakati bilan bog'liq bo'lib, ulardan birinchisi quyidagicha:

1-masala. Snaryad yoki o'q gorizontga α burchak ostida v_0 tezlik bilan otilgan, unga og'irlik kuchi va tezlikka bog'liq qarshilik kuchi ta'sir qiladi, deb hisoblab harakatning trayektoriya tenglamasi topilsin. Boshlang'ich shartlar quyidagicha:

$$t = 0 \text{ da } x = 0, y = 0, \dot{x} = v_0 \cos \alpha, \dot{y} = v_0 \sin \alpha$$

Masala shartiga asosan o'qga $\vec{P}$ og'irlik kuchi va trayektoriyaga urinma bo'ylab, tezlikka qarshi yo'nalgan qarshilik kuchi $km\vec{r}$ ta'sir qilmoqda. Ushbu masalani yechish uchun

ilgarilanma harakat dinamikasining asosiy tenglamasini qo'llagan holda o'q harakatining differensial tenglamasi topiladi va u ikki marta integrallanib, harakatning kinematik tenglamalari, undan so'ng esa trayektoriya tenglamasi topiladi.

Shunday qilib, ilgarilanma harakat dinamikasining asosiy tenglamasiga asosan

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$

Ushbuda tezlanishni radius-vektordan olingan ikkinchi tartibli hosilaga almashtirib, qarshilik kuchi ifodasini kiritgan holda tenglamani skalyar ko'rinishda yozamiz:

$$m\ddot{r} = P - km\dot{r} \quad (1)$$

Oxirgi olingan tenglamani m ga qisqartirib, x va y o'qlarga proyeksiyalab olamiz:

$$\ddot{x} = -k\dot{x}, \quad \ddot{y} = -g - k\dot{y} \quad (2)$$

Shu bilan, har ikkala o'qlar uchun, harakatning ikkinchi tartibli differensial tenglamalariga erishdik. Navbatdagi vazifamiz ularni alohida-alohida integrallab, harakatning kinematik parametrik tenglamalarini topishdan iborat. Integrallashni birinchi differensial tenglamadan boshlaymiz, ya'ni $\ddot{x} = -k\dot{x}$ dan, Buning uchun unga quyidagini $\ddot{x} = d\dot{x}/dt$ kiritgan holda tenglamani qayta yozamiz:

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -kdt$$

Integrallash orqali quyidagiga erishamiz:

$$\ln \dot{x} = -kt + C_1 \quad (3)$$

(3) ga boshlang'ich shartlarni qo'ygan holda $C_1 = \ln(v_0 \cos \alpha)$ ni topamiz. Buni (3) dagi o'rniga qo'ygan holda quyidagini olamiz:

$$\ln \dot{x} = -kt + \ln(v_0 \cos \alpha) \text{ yoki } \ln \frac{\dot{x}}{v_0 \cos \alpha} = -kt$$

Bundan esa $\dot{x} = v_0 e^{-kt} \cos \alpha$ kelib chiqadi (4)

Endi ikkinchi marta integrallashga o'tamiz, buning uchun $\dot{x} = dx/dt$ yozib olib, (4) ga qo'ygan holda o'zgaruvchilarni ajratib integrallaymiz va quyidagiga erishamiz:

$$x = -\frac{v_0}{k} e^{-kt} \cos \alpha + C_2 \quad (5)$$

Bunga boshlang'ich shartlarni qo'ygan holda C_2 ning nimaga teng ekanligini va uni (5) dagi o'z o'rniga qo'yib, x parametr uchun haqiqiy kinematik tenglamani topamiz:

$$x = \frac{v_0}{k} (1 - e^{-kt}) \cos \alpha \quad (6)$$

Navbat ikkinchi differensial tenglamani yechishga yetib keldi. Uning ko'rinishi quyidagicha edi:

$$\ddot{y} = -g - k\dot{y}$$

Bunda $\ddot{y} = d\dot{y}/dt$ yozib olib va o'zgaruvchilarni ajratib, quyidagini olamiz:

$$\frac{d\dot{y}}{g + k\dot{y}} = -dt \quad (7)$$

Buning birinchi integrali quyidagicha bo'ladi:

$$\ln(g + k\dot{y}) = -kt + C_3 \quad (8)$$

Boshlang'ich shartlarni qo'yib $C_3 = \ln(g + kv_0 \sin \alpha)$ ni topamiz. Buni (8) dagi o'z o'rniga olib borib qo'yish orqali erishamiz:

$$\ln \frac{g + k\dot{y}}{g + kv_0 \sin \alpha} = -kt$$

Bundan esa quyidagi kelib chiqadi:

$$\frac{g+ky}{g+kv_0\sin\alpha} = e^{-kt} \quad (9)$$

Va nihoyat (9) ni y ga nisbatan yechsak quyidagini olamiz:

$$\dot{y} = \frac{1}{k}(g + kv_0\sin\alpha)e^{-kt} - \frac{g}{k} \quad (10)$$

Ushbuni yana bir marta integrallab, Y parametr bo'yicha kinematik tenglama olinadi. Buning uchun $\dot{y}=dy/dt$ yozib olinib, o'zgaruvchilarni almashtirish orqali integrallanadi va quyidagiga erishiladi:

$$y = -\frac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha)e^{-kt} - \frac{g}{k}t + C_4 \quad (11)$$

Bunga ham boshlang'ich shartlarni qo'ygan holda $C_4 = \frac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha)$ ni topamiz va uni (11) ga qo'ygan holda Y parametr uchun quyidagi ko'rinishdagi kinematik tenglamani olamiz:

$$y = \frac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t \quad (12)$$

Shunday qilib biz yuqorida e'tirof etilgan ikkita kuch ta'siridagi o'q harakati uchun parametrik kinematik tenglamalarni oldik, ular quyidagilar:

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})\cos\alpha \\ y = \frac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha)(1 - e^{-kt}) - \frac{g}{k}t \end{cases}$$

Bu tenglamalardan t ni yo'qotish orqali trayektoriya tenglamasi topiladi:

$$y = \frac{1}{k} \frac{g+kv_0\sin\alpha}{v_0\cos\alpha} x^2 + \frac{g}{k^2} \ln\left(1 - \frac{k}{v_0\cos\alpha} x\right)$$

2-masala. Yerning tortishish kuchini uning markazigacha bo'lgan masofa kvadratiga teskari mutanosib deb hisoblab, Yerdan gorizontga α burchak ostida v_0 boshlang'ich tezlik bilan otilgan snaryadning Yer sirtidan qanday maksimal balandlikka ko'tarilishini toping. Qarshilik kuchini yo'q deb hisoblang. Snaryadni esa moddiy nuqta deb oling. Yer sirtidagi erkin tushish tezlanishi g , Yerning radiusi R .

Masalani yechish uchun uning chizmasi chizib olinadi (2-rasm). Unda snaryadning boshlang'ich holati M_0 , ixtiyoriy holati M . Moddiy nuqta (snaryad) ga markaziy kuch ta'sir qiladi, deb hisoblab, masalani qutb koordinata tizimida yechamiz. Qutb koordinata tizimi markazi qilib Yer markazini, moddiy nuqtaning ixtiyoriy holatini OM deb olamiz. φ o'qi $\vec{r}$ ga perpendikulyar holda M dan o'tadi. φ_0 va $\vec{r}_0$ lar esa M_0 dan o'tadi. Snaryad harakatining boshlang'ich shartlari quyidagidan iborat:

$$t = 0 \text{ da } |\vec{r}| = |\vec{r}_0| = R, \varphi = 0, \dot{r} = v_{or} = v_0\sin\varphi, \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{R}\cos\alpha,$$

$$t = 0 \text{ uchun } \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \varphi_0 v_0 = r_0 \dot{\varphi}_0, \varphi_0 v_0 = v_0\cos\alpha \text{ lardan } R\dot{\varphi}_0 = v_0\cos\alpha \quad (1)$$

Bundan esa $\dot{\varphi}_0$ kelib chiqadi. Tortishish kuchi $F = \frac{km}{r^2}$ bo'lgani uchun Yer sirti uchun $r=R$ da $F = mg$ bo'lgani uchun $k = gR^2$ kelib chiqadi. Bundan esa

$$F = \frac{mgR^2}{r^2} \quad (2)$$

kelib chiqadi, bu kuch Yerning markazi tomonga yo'nalgan. Yuqoridagilardan kelib chiqib, qutb koordinatalar tizimi koordinatalari bo'yicha moddiy nuqta harakati differensial tenglamalarini yozamiz:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r; \quad \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = F_\varphi;$$

Ushbu masala uchun $F_r = -F = -\frac{mgR^2}{r^2}$, $F_\phi = 0$; shartlar o'rinli bo'lgani uchun ham harakat differensial tenglamalaridan quyidagilar kelib chiqadi:

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{gR^2}{r^2}; \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) = 0 \quad (4)$$

(4) differensial tenglamadan yuzalar integrali $r^2\dot{\phi} = C$ yoki

$$r^2\dot{\phi} = r_0^2\dot{\phi}_0 \quad (5)$$

kelib chiqadi. $|\vec{r}_0| = R$ dan foydalanib (1) va (5) larni qayta yozamiz:

$$r^2\dot{\phi} = Rv_0\cos\alpha \text{ bundan esa } \dot{\phi} = \frac{Rv_0\cos\alpha}{r^2} \quad (6)$$

kelib chiqib, bu ifoda $r^2\dot{\phi} - \vec{r}$ radius-vektor chizgan yuzadan olingan vaqt bo'yicha hosila bo'lib, snaryadning ikkilangan sektor tezligidir. Demak, moddiy nuqtaning markaziy kuch ta'siridagi harakatida sektor tezlik saqlanar ekan.

Endi (6) dan foydalangan holda (3) differensial tenglamani quyidagi shaklda yozamiz:

$$\ddot{r} - \frac{R^2v_0^2\cos^2\alpha}{r^2} = -\frac{gR^2}{r^2};$$

Buni dr ga hadma-had ko'paytirib hamda $\dot{r}dr = \frac{dr}{dt}dr = \dot{r}dr$ dan foydalangan holda yuqoridagini integrallaymiz:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{R^2v_0^2\cos^2\alpha}{2r^2} = \frac{gR^2}{r} + C$$

Boshlang'ich holat uchun $r = r_0 = R$ va $\dot{r} = v_0$ ning r_0 dagi proyeksiyasi $= v_0\sin\alpha$ bo'lsa, integrallash doimiysi quyidagiga teng bo'ladi:

$$C = -\frac{2gR - v_0^2}{2}$$

Buni o'rniga olib borib qo'yib olamiz:

$$\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{R^2v_0^2\cos^2\alpha}{2r^2} = \frac{gR^2}{r} - \frac{2gR - v_0^2}{2} \quad (7)$$

Bu ifoda $\dot{r}$ tezlikning r o'qdagi proyeksiyasi bilan $\vec{r}$ radius-vektor orasidagi bog'lanishni ifodalaydi. Trayektoriyaning eng yuqori nuqtasida snaryad tezligining $\vec{r}$ dagi proyeksiyasi nolga teng, ya'ni $r = r_{max}$ da $\dot{r} = 0$. Bu qiymatlarni (7) ga qo'yib, r_{max} ga nisbatan kvadrat tenglamani olamiz:

$$(2gR - v_0^2)r_{max}^2 - 2gR^2r_{max} + R^2v_0^2\cos^2\alpha = 0$$

Bundan:

$$r_{max} = \frac{gR \pm \sqrt{g^2R^2 - (2gR - v_0^2)v_0^2\cos^2\alpha}}{2gR - v_0^2} R \quad (8)$$

kelib chiqib, u (8) bilan belgilanadi va undan kelib chiqadiki, $v_0^2 = 2gR$ da r_{max} cheksizlikka aylanadi, bu degani snaryad Yerga qaytib tushmaydi. $v_0 = \sqrt{2gR} = 11,2 \text{ km/s}$ - ikkinchi kosmik tezlik. Mana shuning uchun ham snaryadga quyidagi shartni qanoatlantiruvchi tezlik berish lozim:

$$2gR - v_0^2 > 0, \text{ ya'ni } v_0 < \sqrt{2gR}$$

Eng yuqori ko'tarilish balandligi:

$$H = r_{max} - R$$

bo'lib, (8) dan uni topamiz:

$$H_{1,2} = \frac{-gR + v_0^2 \pm \sqrt{g^2 R^2 - (2gR - v_0^2)v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2gR - v_0^2} R$$

H ning manfiy qiymat qabul qilgan H_2 qiymatini tashlab yuborib yozamiz:

$$H = \frac{-gR + v_0^2 + \sqrt{g^2 R^2 - (2gR - v_0^2)v_0^2 \cos^2 \alpha}}{2gR - v_0^2} R$$

bundan esa v_0 vertikal bo'yicha yuqoriga yo'nalgan, ya'ni $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda

$$H = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2} \text{ kelib chiqadi.}$$

Xulosa qilib aytish mumkinki, harbiy ishlarda ilmiy tadqiqot ishlarini olib boruvchi izlanuvchi, bajargan ishi eksperimental ish bo'lsada, uning nazariy qismiga ham e'tibor qaratishi lozim bo'ladi. Buning uchun ushbu maqolada keltirilgan kabi masalalarning yechimi kabi yechimni teran tahlil qilgan holda, tanlangan mavzusi bo'yicha qo'yilgan masalalarni nazariy yechishi va ular asosida xulosalar chiqarishi maqsadga muvofiq bo'ladi. Zero, hech bir fanning biror-bir sohasi bo'lmasin u ham tajribada, ham nazariyada isbotlanmasa u fundamental fan bo'la olmaydi.

Foydalanilgan va tavsiya etilgan adabiyotlar:

1. Israilov, M. Harbiy ishlarda fizika. Monografiya./M. Israilov.-O'R QKA nashriyoti. 2024-y. -200 b.
2. Beknozarova, Z.F. Fizika (mexanika, molekulyar fizika va termodinamika). Darslik./ Z.F. Beknozarova, Sh.Ch. Misirov.-T.: TIQXMMI-MTU nashriyoti-2023,-167 b.
3. Трофимова, Т.И. Курс физики. Учебное пособие для вузов./ Т.И. Трофимова.-М.: Высшая школа, 1990, -478 с.
4. Ergashev, T.G. Differensial tenglamalar (O'quv qo'llanma)/T.G. Ergashev.-T.:TIQXMMI MTU nashriyoti. 2023.-384 b.
5. Mashrabbayev, A. Differensial tenglamalar. O'UM./A. Mashrabbayev.-N.:NAMDU nashriyoti. 2024. -144 b.