

FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI VA MANATON FUNKSIYA

Saodatov Samandar Abdurasul o'g'li

Andijon davlat pedagogika instituti akademik litseyi

Matematika fani o'qituvchisi

<https://doi.org/10.5281/zenodo.18669599>

Annotatsiya. Ushbu maqolada funksiyaning uzluksizligi tushunchasi va monotoniya (o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lish) xossasining asosiy pedagogik va nazariy jihatlarini izohlanadi. Uzluksizlikning limit orqali, ϵ - δ ta'riflari, shuningdek ketma-ketliklar yordamidagi ekvivalent ko'rinishi beriladi. Monoton funksiyalar uchun ta'riflar, ularning grafik xususiyatlari, hosila orqali monotoniya mezoni, bir tomonlama limitlar va sakrashli uzilishlar haqida muhim faktlar yoritiladi. Maqola davomida sodda misollar bilan tushunchalar mustahkamlanadi hamda uzluksizlik va monotoniya o'rtasidagi bog'lanishlar (masalan, uzluksiz funksiyada oraliq qiymatlar xossasi, monoton funksiyada esa bir tomonlama limitlarning mavjudligi) taqqoslab ko'rsatiladi.

Kalit so'zlar: limit, uzluksizlik, ϵ - δ ta'rif, oraliq qiymatlar teoremasi, monoton funksiya, o'suvchi va kamayuvchi funksiya, hosila, sakrashli uzilish.

KIRISH

Matematik analizning eng markaziy g'oyalaridan biri – bu limit tushunchasi. Limit orqali uzluksizlik va differensiallanuvchanlik kabi yirik mavzular quriladi. Uzluksiz funksiya – bu “keskin sakrashlarsiz”, ya'ni argumentdagi juda kichik o'zgarish qiymatni ham juda kichik o'zgartiradigan funksiya sifatida intuitiv tasavvur qilinadi. Biroq analizda “intuitsiya”ning o'zi yetarli emas: uzluksizlikni aniq, tekshiriladigan ta'rif bilan berish talab etiladi. Monotonlik esa funksiyaning yo'nalishini belgilaydi: u oraliqda doim o'sadimi yoki doim kamayadimi. Monoton funksiyalar amaliy masalalarda (iqtisodiy modellarda talab va narx munosabati, fizikada yo'l-vaqt bog'lanishi, biologiyada o'sish jarayonlari) tez-tez uchraydi. Shuning uchun uzluksizlik va monotonlik mavzulari nafaqat nazariy, balki amaliy jihatdan ham muhimdir. Bu maqolada avval uzluksizlikning asosiy ta'riflari va xossalari bayon qilinadi, so'ng monotoniya tushunchasi hamda u bilan bog'liq teoremlar izchil yoritiladi.

ASOSIY QISM

1) Funksiyaning uzluksizligi. $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi, agar $x \rightarrow a$ da $f(x)$ ning limiti mavjud bo'lib, u funksiya qiymatiga teng bo'lsa. Bu klassik limitli ta'rif quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Bu yerda $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ mavjud bo'lishi ikkita shartni bildiradi: chapdan ($x \rightarrow a^-$) va o'ngdan ($x \rightarrow a^+$) limitlar mavjud bo'lib, ular o'zaro teng bo'lishi kerak. Uzluksizlikning eng ishonchli va “hisoblashdan mustaqil” ta'rifi esa ϵ - δ (epsilon-delta) ko'rinishidir:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

Mazkur ta'rifning ma'nosi oddiy: x ni a ga yetarlicha yaqin (δ masofada) olsak, $f(x)$ ham $f(a)$ ga istalgancha yaqin (ϵ masofada) bo'ladi. Shuning uchun uzluksizlik “kichik sabab – kichik oqibat” tamoyilini matematik tilga ko'chiradi. Uzluksizlikning ketma-ketliklar orqali ekvivalent ta'rifi ham bor: agar $x_n \rightarrow a$ bo'lgan har qanday ketma-ketlik uchun $f(x_n) \rightarrow f(a)$ bajarilsa, f a nuqtada uzluksiz. Bu ko'rinish amaliy tekshiruvlarda qulay bo'lishi mumkin, chunki u limitni ketma-ketliklar orqali sinashga imkon beradi.

Uzluksizlikning bir necha muhim xossalari mavjud. Birinchidan, uzluksiz funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi ham uzluksiz; bo'linma esa maxraj nol bo'lmagan joylarda uzluksiz bo'ladi. Ikkinchidan, uzluksiz funksiyalarning kompozitsiyasi ham uzluksiz: agar $g(x)$ a da uzluksiz, $f(u)$ esa $u=g(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(g(x))$ a da uzluksiz. Uchinchidan, uzluksiz funksiya yopiq $[a,b]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymat qabul qiladi (Veyershtass teoremasi). To'rtinchidan, uzluksiz funksiya oraliq qiymatlar xossasiga ega: u $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi istalgan qiymatni ham qabul qiladi. Bu natija ko'pincha "oraliq qiymatlar teoremasi" deb yuritiladi va tenglama yechimining mavjudligini asoslashda (masalan, $f(c)=0$ topish) juda qulaydir.

2) Monoton funksiya. $f(x)$ funksiya I oraliqda o'suvchi (monoton o'suvchi) deyiladi, agar I dagi ixtiyoriy $x_1 < x_2$ uchun $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo'lsa. Agar qat'iy o'suvchi bo'lsa, u holda $f(x_1) < f(x_2)$ talab etiladi. Xuddi shuningdek, kamayuvchi (monoton kamayuvchi) funksiya uchun $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ (qat'iy kamayuvchida " $>$ "). Bu ta'riflar funksiyaning grafiki bo'ylab chapdan o'ngga qarab ketilganda, qiymatlar umumiy yo'nalishda "yuqoriga" yoki "pastga" harakat qilishini anglatadi. Monotonlik ko'pincha funksiyaning teskari funksiyasi mavjudligini ham ta'minlaydi: qat'iy o'suvchi yoki qat'iy kamayuvchi funksiya bir-biriga mos keluvchi qiymatlarni beradi va teskari funksiya aniqlanadi.

Monotonlikni tekshirishning eng mashhur mezon hosila orqali beriladi. Agar $f(x)$ I oraliqda differensiallanuvchi bo'lib, $f'(x) \geq 0$ bo'lsa, unda f I da monoton o'suvchi; agar $f'(x) \leq 0$ bo'lsa, monoton kamayuvchi bo'ladi. Qat'iy o'sish uchun ko'pincha $f'(x) > 0$ (yoki kamida $f'(x) \geq 0$ va nol bo'ladigan nuqtalar "katta" bo'lmasligi) kabi shartlar ishlatiladi. Bu mezon amaliy masalalarda juda qulay: funksiyaning qaysi oraliqlarda o'sishini yoki kamayishini $f'(x)$ ishorasi orqali topish mumkin.

Monoton funksiyalar uzluksiz bo'lishi shart emas. Masalan, pog'onali (step) funksiya oraliqlarda bir qiymatda turib, ayrim nuqtalarda sakrab o'tadi; u ko'pincha monoton bo'lishi mumkin, lekin uzluksiz emas. Shu bilan birga, monoton funksiyalar juda tartibli: har bir nuqtada chap va o'ng limitlar mavjud bo'ladi. Ya'ni har bir a uchun $f(a-)=\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ va $f(a+)=\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ mavjud. Monoton funksiya uzilishlar bo'lsa, ular "sakrashli" uzilish bo'ladi: chap va o'ng limitlar mavjud, lekin teng emas. Bu farq sakrash kattaligini beradi:

$$\Delta f(a) = f(a+) - f(a-).$$

Agar $\Delta f(a)=0$ bo'lsa, u holda a da uzluksizlik tiklanadi. Monoton funksiyaning uzilish nuqtalari soni ko'p bo'lishi mumkin, ammo ular "sanoqli" (countable) to'plamni tashkil qiladi. Bu fakt chuqurroq natija bo'lsa-da, uning intuitiv mazmuni shuki: monotonlik funksiyaning haddan tashqari "tartibga solib" qo'yadi va uzilishlar faqat sakrash shaklida namoyon bo'ladi.

3) Uzluksizlik va monotonlik o'rtasidagi bog'lanish. Agar funksiya biror oraliqda ham uzluksiz, ham monoton bo'lsa, uning xossalari yanada kuchayadi. Masalan, uzluksizlik oraliq qiymatlar xossasini beradi, monotonlik esa qiymatlarning tartibli o'zgarishini ta'minlaydi. Natijada bunday funksiya ko'pincha "yaxshi boshqariladigan" bo'ladi: grafikda keskin tebranishlar yo'q, tenglamalar yechimi yagona bo'lishi ehtimoli yuqori (qat'iy monotonlikda), teskari funksiya ham uzluksiz bo'ladi. Ayniqsa, f uzluksiz va qat'iy monoton bo'lsa, u oraliqda bir-biriga mos qiymatlarni beradi va teskari funksiya mavjud bo'lib, u ham uzluksizdir. Bu natija ko'plab amaliy modellarda "kirish-chiqish" munosabatini barqaror qilish uchun asos bo'lib xizmat qiladi.

Uzluksizlik mavzusida muhim jihatlardan biri — **uzluksizlikning “ko‘lami”**ni farqlashdir. Funksiya faqat bitta nuqtada uzluksiz bo‘lishi mumkin, yoki butun oraliqda uzluksiz bo‘lishi mumkin. Shu ma’noda “nuqtaviy uzluksizlik” va “oraliqda uzluksizlik” tushunchalari ajratiladi: funksiya I oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, I da uzluksiz deyiladi. Bu farq amaliy tahlilda juda zarur, chunki ko‘p teoremlar aynan oraliqda uzluksizlik sharti bilan ishlaydi. Masalan, “grafikni uzmasdan chizish” intuitsiyasi ham aslida shuni anglatadiki, funksiya oraliq bo‘ylab uzluksiz. Bu esa tenglamalar ildizini topish, funksiyaning ekstremumlarini aniqlash, yaqinlashish jarayonlarini tahlil qilishda asosiy tayanch shart bo‘lib xizmat qiladi.

Uzluksizlikning yanada chuqurroq qatlami — bu bir jinsli (uniform) uzluksizlik tushunchasidir. Oddiy uzluksizlikda δ tanlash a nuqtaga bog‘liq bo‘lishi mumkin; bir jinsli uzluksizlikda esa δ butun oraliq bo‘yicha “bitta” ishlaydi: ya’ni x qayerda bo‘lishidan qat’i nazar, bir xil δ tanlanadi. Bu farq mayda ko‘rinadi, ammo juda kuchli natijalar beradi: masalan, yopiq va cheklangan $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan har qanday funksiya bir jinsli uzluksiz bo‘ladi (Hayne–Kantor teoremasi). Bu natija shuni anglatadiki, kesmada uzluksiz funksiya “kutilmagan tarzda” juda tez o‘zgarib ketolmaydi; u butun kesma bo‘yicha barqaror boshqariladi. Masalan, $f(x)=1/x$ funksiyasi $(0,1]$ da uzluksiz, lekin bir jinsli uzluksiz emas; chunki 0 ga yaqinlashganda qiymatlar “juda sezgir” bo‘lib qoladi. Demak, bir jinsli uzluksizlik — analizda barqarorlikni baholash uchun kuchliroq mezondir.

Uzluksizlikni o‘rganishda yana bir zarur bo‘lim — uzilish turlarini aniq ajratishdir. Uzilishlar odatda 3 asosiy turga bo‘linadi:

1. bartaraf qilinadigan uzilish (removable): limit mavjud, lekin funksiya qiymati yo‘q yoki limitga teng emas; bunday holatda $f(a)$ ni limitga teng qilib “to‘g‘rilash” mumkin;
2. sakrashli uzilish (jump): chap va o‘ng limitlar mavjud, lekin teng emas;
3. cheksiz yoki tebranma uzilish: limit mavjud emas (masalan, qiymatlar cheksiz ketadi yoki juda tebranadi).

Bu tasnif amaliy masalalarda muhim: masalan, “funksiyani qanday qilib uzluksiz qilib bo‘ladimi?” degan savolga javob aynan uzilish turiga bog‘liq. Bartaraf qilinadigan uzilishda funksiya “qayta ta’riflanib” uzluksiz qilinadi, sakrashli uzilishda esa bunday imkon yo‘q (faqat keskin sakrashni yo‘qotish uchun butun struktura o‘zgarishi kerak bo‘ladi).

Monotonlik bo‘limini chuqurlashtiradigan juda foydali tushuncha — qisman monotonlik (piecewise monotonicity). Ko‘plab real funksiyalar (masalan, polinomlar, modulli ifodalar, trigonometrik funksiyalar) butun sonli o‘qda bitta yo‘nalishda o‘smaydi, lekin ular ayrim oraliqlarga bo‘linganda har bir bo‘lakda monotondir.

XULOSA

Xulosa qilib aytganda, uzluksizlik va monotonlik matematik analizning tayanch tushunchalaridir. Uzluksizlik limit va ε – δ ta’riflari orqali funksiyaning mahalliy barqarorligini (argument kichik o‘zgarsa, qiymat ham kichik o‘zgarishini) aniq ifodalaydi. Uzluksiz funksiyalar algebraik amallarda yopiq, kompozitsiyada saqlanadi hamda yopiq kesmada ekstremumlarga ega bo‘ladi va oraliq qiymatlar teoremasi orqali tenglamalar yechimining mavjudligini asoslashda muhim rol o‘ynaydi. Monoton funksiyalar esa yo‘nalishli o‘zgarish xossasiga ega bo‘lib, hosila ishorasi orqali tekshiriladi va teskari funksiyaning mavjudligi hamda bir tomonlama limitlarning mavjudligi kabi qudratli xususiyatlarni beradi. Monotonlik uzluksizlikni kafolatlamasa-da, uzilishlar faqat sakrashli ko‘rinishda bo‘lishi va ularning tabiati

tartibli ekanligi bilan ajralib turadi. Shunday qilib, uzluksizlik va monotonlikni birgalikda o'rganish funksiya xatti-harakatini chuqurroq tushunish, grafik va modellarni tahlil qilish hamda amaliy masalalarda ishonchli xulosalar chiqarish uchun mustahkam nazariy asos yaratadi.

Adabiyotlar, References, Литературы:

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. – М.: Физматлит, 2001. – Т. 1. – 608 с.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
3. Зорич В. А. Математический анализ: в 2 т. – 9-е изд. – М.: МЦНМО, 2019. – Т. 1. – 720 с.
4. Apostol T. M. Calculus. Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra. – 2nd ed. – New York: Wiley, 1967. – 666 p.
5. Rudin W. Principles of Mathematical Analysis. – 3rd ed. – New York: McGraw-Hill, 1976. – 342 p.