ОПРЕДЕЛЕНИЕ И НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Ахметов Куанишбек Низамаддинович
Преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент: don10061992@gmail.com
https://doi.org/10.5281/zenodo.14415214

Аннотация: В настоящей дается определения и свойств специальных функции, а также решаются задачи Коши, Коши-Гурса и Неймана(N) для уравнения гиперболического и эллиптического типов второго рода с сингулярным коэффициентом.

Ключевые слова: Определение и некоторые свойства специальных функций.

1. Гамма функция. Гамма функцией $\Gamma(z)$ называется интеграл Эйлера второго рода [4], [28]:

$$\Gamma(z)=\int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}dx, \quad \operatorname{Re} z>0, \tag{1.1}$$

который сходится для всех $z\in C$ при $\operatorname{Re} z>0$ (C-множество комплексных чисел).

Гамма-функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет следующим функциональным соотношениям:

а) обобщенные формулы понижения и повышения аргумента

$$\Gamma(z+n)=(z)_n\Gamma(z), \quad \Gamma(z-n)=\frac{\Gamma(z)}{(z-n)_n}=\frac{(-1)^n\Gamma(z)}{(1-z)_n},$$

б) формула дополнения

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z} \text{ при } z\neq 1, \text{ если } z=\frac{1}{2}, \text{ то } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \tag{1.2}$$

в) формула удвоения (формула Лежандра)

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right),$$

г) другие соотношения

$$\Gamma(n+1)=n!, \quad \Gamma(1)=1, \quad \Gamma(z)\Gamma(-z)=-\frac{\pi}{z\sin\pi z}.$$

2. Бета функция. Бета-функция $B(p,q)$ определяется с помощью интеграла Эйлера первого рода [4], [28]:

$$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt, \quad \operatorname{Re} p>0, \ \operatorname{Re} q>0. \tag{1.3}$$

Функция $B(p,q)$ выражается через функцию $\Gamma(z)$ по формуле

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.4}$$

3. Гипергеометрическая функция Гаусса $F(a,b,c,z)$ определяется при $|z|<1$ как сумма степенного ряда [4], [28]:

$$F(a,b,c,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}, \qquad (1.5)$$

которая называется гипергеометрическим рядом.

Его параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c\neq 0,-1,-2,\dots$, а символ Похгаммера $(a)_n$ при целых неотрицательных определяется равенством [4], [28]:

$$(a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1),\quad n=1,2,\dots,\quad (a)_0=1$$

Очевидно, что

$$(a)_n=(-1)^n(-a)(-a-1)\dots(1-n-a),\quad (1)_n=n!.$$

Если $|z|<1$ и $|z|=1$, $\operatorname{Re}(c-a-b)>0$, то ряд (1.5) сходится абсолютно и равномерно, а при остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда. Один из способов такого продолжения - использование интегрального представления Эйлера

$$\left.\begin{aligned}&F(a,b,c,z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-zt)^{-b}\,dt,\\&0<\operatorname{Re}a<\operatorname{Re}c,\quad |\arg(1-z)|<\pi\end{aligned}\right\} \qquad (1.6)$$

правая часть которого определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла. Далее, приведем свойства функции Гаусса.

$$F(a,b,c,1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},\quad \operatorname{Re}(c-a-b)>0, \qquad (1.7_1)$$

$$F(a,b,b,z)=(1-z)^{-a}, \qquad (1.7_2)$$

$$F(a,b,c,z)=(1-z)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c;z), \qquad (1.7_3)$$

$$F(0,b,c;z)=F(a,b,c;0)=1, \qquad (1.7_4)$$

$$\left.\begin{aligned}&F(a,b,c,z)=(1-z)^{-a}F\left(a,c-b,c;\frac{z}{z-1}\right)=(1-z)^{-b}F\left(a-c,c;\frac{z}{z-1}\right),\\&|\arg(1-z)|<\pi,\end{aligned}\right\} \qquad (1.7_5)$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^aF(a,b,c,z)\right]=az^{a-1}F(a+1,b,c,z) \qquad (1.7_6)$$

Гипергеометрическая функция Гаусса допускает следующую оценку [24], [27]:

$$F(a,b,c,z)=\begin{cases} const & \text{при} \quad c-a-b>0,\ \ 0\le z\le 1, \\ const(1-z)^{c-a-b} & \text{при} \quad c-a-b<0,\ \ 0<z<1, \\ const\left[1+\ln(1-z)\right] & \text{при} \quad c-a-b=0,\ \ 0<z<1. \end{cases} \qquad (1.8)$$

References:

1. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limitespour equation // Arkiv for matematik, astronomiochfysik. 1935. 25A. № 10. P. 1-12.
2. Urinov A.K., Okboev A.B. Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind. // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol.41. no. 9. 2020. Pp. 1886–1897 .
3. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.2. 296 с.
4. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.1. 296 с.
5. Бицадзе А.В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. // Некоторые проблемы математики и механики: Сб. науч. тр. Ленинград, 1970. С. 112-119.
6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: «Наука». 1966. 204 с.
7. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с.
8. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 165 с.
9. Sindarova, Shoxista Maxammatovna (2021). O'YINLI TEXNOLOGIYALARDAN FOYDALANISH ORQALI O'QUVCHILARNING BILIM, KO'NIKMA VA MALAKALARINI SHAKLLANTIRISH (CHIZMACHILIK FANI MISOLIDA). Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1 (11), 686-691.
10. Maxammatovna, S. S. (2022). Methods of Solving Some Problems of Teaching Engineering Graphics. Spanish Journal of Innovation and Integrity, 7, 97-102.
11. Рихсибоев, У. Т., Халилова, Х. Э., & Синдарова, Ш. М. (2022). AutoCAD дастуридан фойдаланиб деталлардаги ўтиш чизиқларини қуришни автоматлаштириш. Science and Education, 3(4), 534-541.
12. Bobomurotov, T. G., & Rikhsiboev, U. T. (2022). Fundamentals Of Designing Triangles Into Sections Equal 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 And 19. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science, 3(2), 96-101.
13. Makhammatovna, S. S. (2023). Pedagogical and Psychological Aspects of Improving the Methods of Developing Students' Creative Research. Web of Semantic: Universal Journal on Innovative Education, 2(3), 37-41.
14. Abdurahimova, F. A., Ibrohimova, D. N. Q., Sindarova, S. M., & Pardayev, M. S. O. G. L. (2022). Trikotaj mahsulotlar ishlab chiqarish uchun paxta va ipak ipini tayyorlash va foydalanish texnologiyasi. Science and Education, 3(4), 448-452.
15. Sindarova, S. (2023). TALABALARDA IJODIY IZLANUVCHANLIKKA XOS SIFATLARNI

SHAKILLANTIRISH USULLARI. Академические исследования в современной науке, 2(11), 23-29.

16. Sindarova Shoxista Maxammatovna, & Maxmudov Abdunabi Abdugʻafforovich (2022). MUHANDISLIK GRAFIKASI FANLARINI OʻQITISHDA IJODIY IZLANISH TALAB QILINADIGAN MASALALAR. Ta'lim fidoyilari, 24 (17), 2-275-284.

17. Rixsiboyev, U. T., & Maxammatovna, S. S. (2023). TEXNOLOGIK VOSITALAR ORQALI INNOVATSION DARS TASHKIL QILISH. ОБРАЗОВАНИЕ НАУКА И ИННОВАЦИОННЫЕ ИДЕИ В МИРЕ, 20(8), 168-175.

18. Shoxista, S. Abdug'aforovich, MA (2022). METHODOLOGY OF STUDENT CAPACITY DEVELOPMENT IN TEACHING ENGINEERING GRAPHICS. Gospodarka i Innowacje, 22, 557-560.

19. Sindarova, S. M. (2021). IQTIDORLI TALABALAR BILAN SHUG'ULLANISH METODIKASI.(MUHANDISLIK FANLARI MISOLIDA). Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 1(8), 32-39.

20. Shoxista, S. (2023). MUHANDISLIK GRAFIKASI FANINI OʻZLASHTIRISHDA ZAMONAVIY DASTURDAN FOYDALANISH ORQALI TALABALAR IJODKORLIGINI RIVOJLANTIRISH. Innovations in Technology and Science Education, 2(9), 780-790.

21. Синдарова, Ш. (2023). Yosh ijodkorlarni qoʻllab quvvatlash va ular bilan ishlashni tashkil qilish. Общество и инновации, 4(2), 177-181.

22. Makhammatovna, S. S. (2023). DEVELOPMENT OF ENGINEERING GRAPHICS STUDENTS TO CREATIVITY THROUGH IMAGINATION VIEWS. Лучшие интеллектуальные исследования, 3(1), 22-26.

23. Takhirovich, A. U., & Makhammatovna, S. S. (2023). Forming Creativity through the Use of Modern Educational Tools. International Journal of Formal Education, 2(6), 404-409.

24. Sindarova, S. (2023). AUTOCAD DASTURIDAN FOYDALANIB TALABALARNING IJODIY IZLANISHLARINI RIVOJLANTIRISH. Наука и технология в современном мире, 2(14), 38-41.

25. Mirzaliyev, Z. E., Sindarova, S., & Eraliyeva, S. Z. (2021). Develop students' knowledge, skills and competencies through the use of game technology in the teaching of school drawing. American Journal of Social and Humanitarian Research, 2(1), 58-62.

26. Sindarova, S. M., Rikhsibaev, U. T., & Khalilova, H. E. (2022). THE NEED TO RESEARCH AND USE ADVANCED PEDAGOGICAL TECHNOLOGIES IN THE DEVELOPMENT OF STUDENTS'CREATIVE RESEARCH. Academic research in modern science, 1(12), 34-40.

27. Mirzaliev, Z., Sindarova, S., & Eraliyeva, S. (2019). Organization of Independent Work of Students on Drawing for Implementation of the Practice-Oriented Approach in Training. International Journal of Progressive Sciences and Technologies, 17(1), 297-298.